DER ENERGIE–IMPULS–TENSOR IN DER QUANTENELEKTRODYNAMIK

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

dem Fachbereich Physik
der Eberhard-Karls-Universität
zu Tübingen

vorgelegt von
Thomas Schott
geb. in Bayrischzell

1974

75 215

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546528_0080

DER ENERGIE–IMPULS–TENSOR IN DER QUANTENELEKTRODYNAMIK

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

dem Fachbereich Physik
der Eberhard-Karls-Universität
zu Tübingen

vorgelegt von
Thomas Schott
geb. in Bayrischzell

1974

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung : 30.10.74

Dekan: Prof. Dr. K. Wildermuth

1. Berichterstatter : Prof. Dr. H. Mitter

2. Berichterstatter : Dozent Dr. W. Dittrich

"Der ganzen modernen Weltanschauung liegt die Täuschung zugrunde, daß die sogenannten Naturgesetze die Erklärungen der Naturerscheinungen seien"

Ludwig Wittgenstein

Tractatus logico-philosophicus 6.371

Allen denen, die darunter leiden

Inhaltsübersicht

Einleitung	Seite	1
I. Konstruktionsverfahren für den Energie-Impuls-Tensor in der relativistischen Feldtheorie	-.-	4
I.1.Symmetrisierung und Kopplung an die Metrik	-.-	4
I.2.Erhaltungssätze für den Energie-Impuls-Tensor mit äußeren Quellen	-.-	14
II.Generator-Relationen und kanonische Kommutatoren	-.-	21
II.1.Poincaré-Invarianz und Bewegungsgleichungen	-.-	21
II.2.Verallgemeinerte Dirac-Schwinger-Bedingungen	-.-	38
III.Nichtkanonische Methoden	-.-	52
III.1.Verallgemeinerte "Ward-Idantitäten" des Energie-Impuls-Tensors	-.-	53
III.2.Eichinvariante Regularisierung des Operator-Produktes	-.-	57
III.3.Regularisierung des ET. in "Loop-Approximation"	-.-	63
III.4.Anomalien der Erhaltungssätze	-.-	69
Zusammenfassung und Diskussion	-.-	74
Literaturverzeichnis	-.-	76
Appendix 1	-.-	81
-/- 2	-.-	83
-/- 3	-.-	84
-/- 4	-.-	85
-/- 5	-.-	88
-/- 6	-.-	92
-/- 7	-.-	93
-/- 8	-.-	96
-/- 9	-.-	99
-/- 1o	-.-	1o2

Einleitung

In der allgemeinen Theorie relativistischer Felder besitzt der Energie-Impuls-Tensor fundamentale Bedeutung,da alle raum-zeitlichen Transformationseigenschaften der Systeme durch ihn dargestellt werden können. Die Einschränkung auf lokale Modelle bedingt, daß Energie- und Impulsdichte rein lokale Funktionen der Felder sind. Gilt weiter noch das Einstein´sche "Äquivalenzprinzip", so wird auch die Form des Energie-Impuls-Tensors in Analogie zur "Minimalkopplung" in der Elektrodynamik weitgehend festgelegt. Folglich betrachtet man dessen lokale Eigenschaften sinnvollerweise zusammen mit dem Gravitationsfeld. Folgende Argumente erlauben es jedoch, sich zunächst auf den Fall ohne Gravitation zu beschränken. Wie wir sehen werden, ähnelt die Struktur des Energie-Impuls-Tensors sehr derjenigen des elektromagnetischen Stromes. Es ist daher sinnvoll, in der quantisierten Theorie die beiden lokalen Operatoren in analoger Weise zu diskutieren. Physikalisch sieht man unmittelbar ein, daß die Lokalität von Energie und Impuls immer verkoppelt ist mit der Lokalisierbarkeit anderer Eigenschaften des Systems. So wird z.B. eine Aussage über die Ladungsverteilung im Atomkern auch immer eine analoge Information über die lokale Materieverteilung enthalten.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit den Operatoreigenschaften des Energie-Impuls-Tensors imRahmen reiner Quantenelektrodynamik.Für diese Wahl sprechen natürlich vor allem die physikalische Relevanz der Quantenelektrodynamik und die Tatsache, daß die Theorie im Rahmen einer renormierten Störungstheorie lösbar und physikalisch genau interpretierbar ist.

Wir gehen dazu in folgende Schritten vor. Im ersten Abschnitt werden Konstruktionsprinzipien für den Energie-Impuls-Tensor (im folgenden kurz ET.) im quantisierten Fall an Hand des Schwingerschen Variationsprinzips diskutiert. Besonderes Gewicht liegt dabei auf Fragen der Symmetrisierung bzw. den Zusammenhang mit dem metrischen Feld im Falle äußerer Gravitationsfelder gelegt. Da die Theorie im Grenzfall sehr

schwacher Felder stabil sein sollte, werden wir konsequenterweise auch im Fall reiner Quantenelektrodynamik nur die symmetrisierte Form des ET. betrachten.
Im Anschluß daran werden die klassischen Erhaltungssätze für den ET. für quantisierte Felder untersucht. Alle Rechnungen werden in der nicht explizit kovarianten "Coulomb-Eichung" durchgeführt, da diese Eichung als einzige konsistente Operatoraussagen erlaubt. Hierbei treten Operatorordnungs-Probleme auf, da Dirac- und Maxwell-Feld nicht mehr vollständig miteinander vertauschen. Dies führt dazu, im Wechselwirkungsglied der Diracgleichung eine besonders symmetrische Form des Operatorproduktes der wechselwirkenden Felder zu wählen, welche sich im folgenden als konsistent erweisen wird.

Gemäß dem kanonischen Formalismus der Quantentheorie (hier im "Heisenberg-Bild") enthält die Kommutator-Algebra aller vorkommenden Operatoren zu gleichen Zeiten die gesamte Information über das betrachtete physikalische System. Deshalb werden im zweiten Kapitel ausführlich gleichzeitige Kommutator-Relationen mit dem ET. untersucht. Da dieser Ableitungen der Felder in bilinearen Produkten enthält, müßen neben den kanonischen Vertauschungsrelationen für die Felder auch die Feldgleichungen sebst benützt werden. Dabei treten dann wieder Operatorordnungs-Probleme auf, die zu wichtigen Konsistenzbedingungen führen.

Über die allgemeinen Bedingungen der Lorentz-Kovarianz und weiter der Existenz von Poincaré-Generatoren wird man dazu geführt, auch gleichzeitige Kommutatoren der einzelnen Komponenten der ET. untereinander zu untersuchen. Solche Relationen können auch auf Grund allgemeiner Symmetrie-Überlegungen abgeleitet werden, so daß hier ein Vergleich mit den expliziten Resultaten in der Quantenelektrodynamik interessant ist. Die allgemeinen Grundlagen dafür wurden insbesondere von Dirac und Schwinger untersucht. Wir werden auf die Dirac´sche Formulierung des Problems etwas näher eingehen, da diese am allgemeinsten gehalten ist und vielleicht am tiefsten in die Problematik einer lokalen, relativistischen Feldtheorie eindringt.

Die bisherige Diskussion des ET. beschränkte sich auf rein kanonische Methoden. Bekanntlich können jedoch in einer Quantenfeldtheorie Schwierigkeiten mit dem kanonischen Formalismus auftreten, weil im allgemeinen Produkte von lokalen Operatoren am selben Raum-Zeit-Punkt divergente Matrix-Elemente besitzen können und daher die zusammengesetzten Operatoren nur mit zusätzlichen Forderungen definiert werden können. Da nun der ET. ebenso wie der elektromagnetische "Vierer-Strom" im Wesentlichen bilineare Produkte der Felder sind, treten solche Probleme bereits auf sehr fundamentaler Ebene auf. Wir wenden uns daher im letzten Kapitel nichtkanonischen Verfahren zu.Wir betrachten Matrixelemente für den ET., die sich mit funktionalen Methoden zurückführen lassen auf reine Vakuum-Amplituden in Anwesenheit äußerer Felder. Diese enthalten in störungstheoretischer Entwicklung dann divergente Anteile. Weiter führen wir eine Regularisierung der Operatorprodukte im ET. durch das sog. "Point-Splitting" ein, indem wir die Orts-Argumente in den bilinearen Produkten der Spinorfelder aufspalten und den Grenzübergang zu gleichen Argumenten in der Vakuum-Amplitude untersuchen. Zu prüfen ist dann, ob die formalen Erhaltunssätze und Symmetrien dieser Operatoren auch in den regularisierten Matrixelementen erfüllt sind. Bekanntlich können in der Störungstheorie auch sog. "Anomalien" auftreten, d.h. bestimmte dieser sog. verallgemeinerten "Ward-Identitäten" verletzt sein. Besonders zu beachten ist die Eichinvarianz der, welche durch das Regularisierungsverfahren nicht gestört werden darf. Tatsächlich bedingt Eichinvarianz dann auch eine Anomalie im Erhaltungssatz für den ET. in der Ordnung e^2 der Störungstheorie. Die Rechnung dazu erfolgt in enger Analogie zur sog. "Adler-Anomalie" im Erhaltungssatz des Pseudovektorstromes in der Quantenelektrodynamik.

Kapitel I Konstruktionsverfahren für den Energie-Impuls Tensor in der relativistischen Feldtheorie

I.1. Symmetrisierung und Kopplung an die Metrik

Wir betrachten im ersten Teil Verfahren zur Konstruktion des E.T. sowie Probleme der Symmetrisierung und Kopplung an das Gravitationsfeld. Wir gehen aus vom klassischen Wirkungsprinzip mit einer Lagrangefunktion $\mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu \psi(x))$ für ein relativistisches Feld $\psi(x)$. Die Wirkung (σ 1/2 beschreibt raumartige Hyperflächen $x^0(1) > x^0(2)$)

$$W_{12} = \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} d^4x \, \mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu \psi(x)) \tag{1.1}$$

wird nun allgemein mit einer Änderung des Feldes $\bar{\delta}\psi(x)$ und einer Änderung der Koordinaten $\delta x^\mu(x)$ variiert. Man erhält unter Verwendung der Feldgleichungen die "Oberflächenterme"

$$\begin{aligned} \delta W_{12} &= \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} d^4x \, \partial^\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \bar{\delta}\psi + \mathcal{L} \cdot \delta x_\mu(x) \right] \\ &= \left(\int_{\sigma_1} d\sigma^\mu - \int_{\sigma_2} d\sigma^\mu \right) G_\mu(x) = G_1 - G_2 \end{aligned} \tag{1.2}$$

mit der lokalen "Viererdichte" $G_\mu(x)$ und der Formänderung der Funktion $\psi(x)$

$$\bar{\delta}\psi = \delta^0\psi + \delta^x\psi \tag{1.3}$$

Invarianzeigenschaften der Wirkung ergeben dann die entsprechenden Erhaltungssätze. Beim Übergang zur Quantenmechanik /1, 76, 78, 79, 80, 81/ wird δW_{12} als Operator der entsprechenden unitären Transformation der Übergangsamplitude $\langle \sigma_1 | \sigma_2 \rangle$ der dynamischen Entwicklung des Systems von (σ_1) nach (σ_2) interpretiert.

$$\delta\langle\sigma_1|\sigma_2\rangle = i\langle\sigma_1|\delta W_{12}|\sigma_2\rangle$$

(1.4) $$= i\langle\sigma_1|(G_1 - G_2)|\sigma_2\rangle$$

Die kausale Beschreibung erfordert dann für W_{12} notwendig die Integraldarstellung (1.1) /79/. Für beliebige Variation der Koordinaten ändert sich im allgemeinen die Metrik

(1.5) $$\delta g_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \delta x_\nu(x) + \partial_\nu \delta x_\mu(x)$$

(Ausgangspunkt der Variation ist dabei die flache Metrik $g = (\overset{\wedge}{-1}\,1\,1\,1)$).
Die Bedingung ebener Metrik $\delta g_{\mu\nu} = 0$ schränkt $\delta x_\mu(x)$ auf infinites. Lorentztransformationen ein

(1.6) $$\delta x_\mu(x) = \varepsilon_\mu + \varepsilon_\mu{}^\nu x_\nu \quad ; \quad \varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}$$

$\psi(x)$ soll sich als Darstellung der Lorentz-Gruppe transformieren, so daß gilt

(1.7) $$\delta^*\psi(x) = -\tfrac{i}{2} S^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu}\psi(x) - \partial_\lambda\psi(x)\,\delta x^\lambda(x)$$

wobei $S^{\mu\nu}$ eine Matrix im Raum der Komponenten von $\psi(x)$ ist, welche die Lie-Algebra der Lorentz-Gruppe erfüllt

(1.8) $$[S^{\mu\nu}, S^{\lambda\tau}] = i\{S^{\mu\lambda}g^{\nu\tau} + S^{\nu\tau}g^{\mu\lambda} - S^{\mu\tau}g^{\nu\lambda} - S^{\nu\lambda}g^{\mu\tau}\}$$

Nach (1.2) lassen sich dann die Generatoren P_μ, $M_{\mu\nu}$ der Translation ε_μ bzw. der Rotationen $\varepsilon_{\mu\nu}$ durch den "kanonischen" Energie-Impuls-Tensor $\Theta_{\mu\nu}$ ausdrücken.

(1.9) $$\Theta_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\mathcal{L} + \pi\cdot\partial_\nu\psi \quad ; \quad \pi_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\psi)}$$

$$P^\nu = \int_\sigma d\sigma^\mu\,\Theta_\mu{}^\nu(x)$$

$$M^{\nu\lambda} = \int_\sigma d\sigma^\mu\,M_\mu{}^{\nu\lambda}(x)$$

mit der Drehimpulsdichte

$$M_{\mu\nu\lambda}(x) = x_\nu \Theta_{\mu\lambda} - x_\lambda \Theta_{\mu\nu} + i\,\pi \cdot S_{\nu\lambda}\psi \tag{1.10}$$

Die Punkt-Notation $\pi \cdot \psi$ deutet an, daß beim Variationsverfahren die Reihenfolge der Operatoren beachtet werden muß, z.B.

$$\delta_B(ABC) = A(\delta B)C := \delta B \cdot (AC) \tag{1.11}$$

Die Generatoren haben bei Beschränkung auf Transformationen (1.6) nur Bedeutung als <u>globale</u> Observable, und die Variationen $\delta_{T,R} W_{12}$ sind nur ein Maß für die integralen Eigenschaften des Tensors $\Theta_{\mu\nu}(x)$.

Lokale Eigenschaften des Systems kommen erst zur Geltung, wenn dynamische Kopplungen an andere Felder eine Rolle spielen. Einfachster Fall ist die Kopplung an ein äußeres, lokales c-Zahl Feld Q(x). Die Lagrangedichte $\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi, Q)$ wird dann eine explizite Funktion von x^μ . Die Variation $\delta_Q W_{12}$ ergibt dann

$$\delta_Q W_{12} = \int_2^1 d^4x\, \delta_Q \mathcal{L} := \int_2^1 d^4x\, G_Q(x)\, \delta Q(x) \tag{1.12}$$

Wenn die Dichte $G_Q(x)$ nicht von Q(x) abhängt, so beschreibt sie eine lokale, innere Eigenschaft des Systems $\psi(x)$. Bestes Beispiel ist die elektromagnetische Stromdichte, die über ein äußeres Vektorpotential $\mathcal{A}^\mu(x)$ definiert werden kann

$$\delta_{\mathcal{A}} W_{12} := \int_2^1 d^4x\, j_\mu(x)\, \delta \mathcal{A}^\mu(x) \tag{1.13}$$

Der kanonische Tensor $\Theta_{\mu\nu}$ ist durch (1.9) noch nicht eindeutig festgelegt. Das erlaubt uns, einen symmetrischen Tensor $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ zu konstruieren. Damit läßt sich auch $M_{\mu\nu\lambda}(x)$ allein durch $T_{\mu\nu}(x)$ ausdrücken und der Erhaltungssatz für die Drehimpulsdichte lautet

(1.13a) $$\partial^\mu M_{\mu\nu\lambda}(x) = \partial^\mu (x_\nu T_{\mu\lambda} - x_\lambda T_{\mu\nu}) = T_{\nu\lambda} - T_{\lambda\nu} = 0$$

Wegen (1.10) muß $T_{\mu\nu}$ daher einen entsprechenden Spin-Anteil enthalten. Die Lösung ist /82/

(1.14) $$T_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu} + \tfrac{i}{2}\partial^\lambda \left[\pi_\mu \cdot S_{\lambda\nu}\psi + \pi_\lambda \cdot S_{\nu\mu}\psi + \pi_\nu \cdot S_{\lambda\mu}\psi \right]$$

Es muß betont werden, daß nur die integralen Eigenschaften von $T_{\mu\nu}$ bzw. $\Theta_{\mu\nu}$ äquivalent sind und daß die Ableitung partielle Integrationen verwendet, deren Oberflächenbeiträge verschwinden müssen. (Das gilt nicht mehr notwendig für ebene Wellen). Grundlegende Bedeutung gewinnt die Symmetrie des E.T. bei Ankopplung an das Gravitationsfeld. Nimmt man an, daß das Einsteinsche Äquivalenzprinzip gilt, so ergibt das Wirkungsprinzip mit dem metrischen Feld $g_{\mu\nu}(x)$

(1.15) $$\delta_g W_{12} = \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} d^4x \sqrt{-g}\, \delta\tilde{\mathcal{L}} := \frac{1}{2}\int_{\sigma_2}^{\sigma_1} d^4x \sqrt{-g}\, T^{\mu\nu}(x)\, \delta g_{\mu\nu}(x)$$

Wegen $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ wird $T_{\mu\nu}$ damit automatisch symmetrisch definiert. Die Abhängigkeit $\tilde{\mathcal{L}}(g)$ soll dabei allein durch die Forderung festgelegt sein, daß W_{12} invariant gegen allgemeine Transformation der Koordinaten ist und $\tilde{\mathcal{L}}$ ein Skalar ist. $\tilde{\mathcal{L}}(g)$ findet man, indem man alle Ableitungen kovariant formuliert und das metrische Skalarprodukt mit $g_{\mu\nu}(x)$ bildet. Damit finden wir für $T_{\mu\nu}(x)$ folgende Definition /83/

(1.16) $$\tfrac{1}{2}\sqrt{-g}\, T_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial(\sqrt{-g}\,\tilde{\mathcal{L}})}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\,\tilde{\mathcal{L}})}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right]$$

Wir werden dann benutzen, daß diese Ableitung auch im Limes flacher Metrik einen symmetrischen Tensor definiert, den wir auf Grund des Äquivalenzprinzips dann als den physikalisch relevanten betrachten.

Um Spinorfelder in den Formalismus einzubeziehen, ist es notwendig, eine spezielle Darstellung der Metrik einzuführen, das sogenannte Weyl'sche Vierbein-Feld $e_\alpha{}^\mu(x)$ $(\alpha = 0,1,2,3)$, welches in jedem Punkt x^μ lokale Minkowski-Koordinaten definiert. Damit können beliebige Tensorgrößen sowohl auf allgemeine Koordinaten als auch auf das lokale System bezogen werden /21, 22, 32, 85/. Dann sollen folgende Beziehungen gelten

$$
\begin{aligned}
& e_\alpha{}^\mu(x)\, e^{\alpha\nu}(x) = e_\alpha{}^\mu(x)\, e_\beta{}^\nu(x)\, \eta^{\alpha\beta} = g^{\mu\nu}(x) \\
& e_\alpha{}^\mu\, e_{\beta\mu} = e_\alpha{}^\mu e_\beta{}^\nu g_{\mu\nu}(x) = \eta^{\alpha\beta} \\
& \sqrt{-g} = \det\left(e_\alpha{}^\mu(x)\right) := e(x) \qquad \eta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

Damit lassen sich Felder mit beliebigem Spin kovariant darstellen. Die kovariante Ableitung ist dann so definiert

$$
\psi_{;\mu}(x) = \partial_\mu \psi(x) - \tfrac{i}{2}\, \omega_{\alpha\beta\mu}(x)\, S^{\alpha\beta} \psi(x) \tag{1.18}
$$

Die "affinen" Größen $\omega_{\alpha\beta\mu}(x)$ entsprechen den "Christoffel"-Symbolen $\Gamma^\mu_{\rho\sigma}(x)$ und sind durch die $e_\alpha{}^\mu(x)$ und deren Ableitungen definiert /84/.

$$
\begin{aligned}
\omega_{\alpha\beta\mu}(x) = \tfrac{1}{2} e^\nu{}_\mu(x) \Big\{ & \partial_\nu e_{\alpha\rho} \left(e_\beta{}^\rho e_\gamma{}^\nu - e_\beta{}^\nu e_\gamma{}^\rho\right) \\
& + \partial_\nu e_{\beta\rho} \left(e_\gamma{}^\rho e_\alpha{}^\nu - e_\gamma{}^\nu e_\alpha{}^\rho\right) \\
& - \partial_\nu e_{\gamma\rho} \left(e_\alpha{}^\rho e_\beta{}^\nu - e_\alpha{}^\nu e_\beta{}^\rho\right) \Big\}
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

Die (1.16) entsprechende Definition lautet jetzt

$$
e\, T^\alpha{}_\nu(x) = \frac{\delta W_{12}}{\delta e_\alpha{}^\nu(x)} = \frac{\partial(e\tilde{\mathcal{L}})}{\partial e_\alpha{}^\nu} - \partial_\lambda \left[\frac{\partial(e\tilde{\mathcal{L}})}{\partial(\partial_\lambda e_\alpha{}^\nu)} \right] \tag{1.20}
$$

$T^\alpha{}_\nu(x)$ besitzt gemischte Indizes. Lokale Lorentzinvarianz erfordert, daß

(1.21) $$T^{\alpha\beta} = T^{\alpha}_{\ \nu}\, e^{\beta\nu} = T^{\beta\alpha}$$

symmetrisch ist (sonst würden zu $T_{\mu\nu}(x)$ noch weitere Spinterme beitragen) und damit auch

(1.22) $$T_{\mu\nu} = e_{\alpha\mu} T^{\alpha}_{\ \nu} = e_{\alpha\mu} T^{\alpha\beta} e_{\beta\nu} = T_{\nu\mu}$$

ebenfalls symmetrisch ist.
Wir betrachten nun konkret die Lagrangedichte der Maxwell-Dirac-Theorie (mit den Beziehungen $\overleftrightarrow{\partial} = \frac{1}{2}(\overleftarrow{\partial} + \overrightarrow{\partial})$, $a\overleftrightarrow{\partial} b = -(\partial a) b$)

(1.23) $$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{8}\{F_{\mu\nu}(x), F^{\mu\nu}(x)\} + \tfrac{1}{2}\left[\bar{\psi}(x), \left(i\overleftrightarrow{\not\partial} - m\right)\psi(x)\right] + \tfrac{1}{2}\{j_\mu(x), A^\mu(x)\}$$

und konstruieren die kovariante Verallgemeinerung $\tilde{\mathcal{L}}(g, e)$

$$\tilde{\mathcal{L}}^{A}(g) = -\tfrac{1}{8} g_{\mu\lambda} g_{\nu\tau} \{F^{\mu\nu}(x), F^{\lambda\tau}(x)\}$$

(1.24) $$\tilde{\mathcal{L}}^{D}(e) = \tfrac{i}{4} e_\alpha^{\ \mu}\left([\bar{\psi}, \gamma^\alpha \psi_\mu] - [\bar{\psi}_\mu, \gamma^\alpha \psi]\right) - \tfrac{m}{2}[\bar{\psi}, \psi]$$
$$+ \tfrac{1}{2}\{j^\alpha(x), A_\mu(x)\} e_\alpha^{\ \mu}(x)$$

Der Wechselwirkungsanteil ist dabei <u>nicht</u> $j_\mu A_\nu g^{\mu\nu}$,
da in $j^\alpha = -\frac{e}{2}[\bar{\psi}(x), \gamma^\alpha \psi(x)]$ die γ-Matrix nur lokal definiert ist, und damit auch <u>nicht</u> symmetrisch!
Damit können wir nun $T_{\mu\nu}(x)$ nach (1.16) bzw. (1.20) berechnen. Wir beschränken uns dabei auf den zuletzt durchzuführenden Limes zur flachen Metrik. (Wir müssen daher kovariante und kontravariante Indizes nicht extra unterscheiden.) Wir verwenden die Relationen

$$dg = -g\, g_{\mu\nu}\, dg^{\mu\nu} \quad ; \quad \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial g_{\rho\sigma}} = \tfrac{1}{2}\left(\delta_\mu^{\ \rho}\delta_\nu^{\ \sigma} + \delta_\nu^{\ \rho}\delta_\mu^{\ \sigma}\right)$$

(1.25)
$$\lim_{e\to 1} \frac{\partial \omega_{\gamma\delta\sigma}}{\partial(\partial_\rho e_\alpha^{\ \mu})} = \tfrac{1}{2}\Big\{\eta_{\delta\mu}\eta^{\rho}_{\ \sigma}\eta_\gamma^{\ \alpha} - \eta_{\sigma\mu}\eta^{\rho}_{\ \delta}\eta_\gamma^{\ \alpha} +$$
$$+ \eta_{\sigma\mu}\eta_\gamma^{\ \rho}\eta_\delta^{\ \alpha} - \eta_{\gamma\mu}\eta^{\rho}_{\ \sigma}\eta_\delta^{\ \alpha}$$
$$- \eta_{\gamma\mu}\eta^{\rho}_{\ \delta}\eta_\sigma^{\ \alpha} + \eta_{\delta\mu}\eta_\gamma^{\ \rho}\eta_\sigma^{\ \alpha}\Big\}$$

und erhalten

$$T^{M}_{\mu\nu} = \tfrac{1}{8} g_{\mu\nu} \{F_{\lambda\tau}, F^{\lambda\tau}\} + \tfrac{1}{2} \{F_{\mu\lambda}, F^{\lambda}{}_{\nu}\}$$

(1.26)
$$T^{D}{}_{\nu}{}^{\alpha} = -\delta^{\alpha}_{\nu} \mathcal{L}^{D} + \tfrac{i}{2} [\bar{\psi} \gamma^{\alpha}, \overleftrightarrow{\partial_{\nu}} \psi] - \tfrac{i}{32} \partial^{\lambda} [\bar{\psi}(x), \{\gamma^{\beta}[\gamma_{\lambda}, \gamma^{\varepsilon}] + [\gamma_{\lambda}, \gamma^{\varepsilon}]\gamma^{\beta}\}\psi] \frac{\partial \omega_{\varepsilon\beta}}{\partial \partial_{\alpha} e^{\nu}_{\varepsilon}}$$
$$+ \tfrac{1}{2} \{j^{\alpha}(x), A_{\nu}(x)\}$$
$$= \tfrac{i}{2} [\bar{\psi} \gamma^{\alpha}, \overleftrightarrow{\partial_{\nu}} \psi] + \tfrac{i}{32} \partial^{\lambda} [\bar{\psi}, (\{\gamma_{\lambda}, [\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}]\} + \{\gamma_{\mu}, [\gamma_{\lambda}, \gamma_{\nu}]\} + \{\gamma_{\nu}, [\gamma_{\lambda}, \gamma_{\mu}]\})\psi]$$
$$- \delta^{\alpha}_{\nu} \mathcal{L}^{D} + \tfrac{1}{2} \{j^{\alpha}(x), A_{\nu}(x)\}$$

Mit der Dirac-Algebra $\{\gamma_{\mu}, [\gamma_{\lambda}, \gamma_{\nu}]\} + \{\gamma_{\nu}, [\gamma_{\lambda}, \gamma_{\mu}]\} = 0$ folgt dal

(1.27)
$$T^{D}_{\mu\nu}(x) = -g_{\mu\nu} \mathcal{L}^{D} + \tfrac{i}{2} [\bar{\psi}, \gamma_{\mu} \overleftrightarrow{\partial_{\nu}} \psi] + \tfrac{i}{32} \partial^{\lambda} [\bar{\psi}, \{\gamma_{\lambda}, [\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}]\}\psi] + \tfrac{1}{2} \{j_{\mu}, A_{\nu}\}$$

Wir geben nun zum Vergleich den kanonisch konstruierten Tensor nach (1.14) in symmetrisierter Form an

(1.28)
$$T_{\mu\nu}(x) = \tfrac{1}{8} g_{\mu\nu} \{F_{\lambda\tau}, F^{\lambda\tau}\} - \tfrac{1}{2} \{F_{\mu\lambda}, \partial_{\nu} A^{\lambda}\} + \tfrac{1}{2} \partial^{\lambda} \{F_{\mu\lambda}, A_{\nu}\}$$
$$- g_{\mu\nu} \mathcal{L}^{D} + \tfrac{i}{2} [\bar{\psi}, \gamma_{\mu} \overleftrightarrow{\partial_{\nu}} \psi] + \tfrac{i}{32} \partial^{\lambda} [\bar{\psi}, \{\gamma_{\lambda}, [\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}]\}\psi]$$

Man sieht, daß der Wechselwirkungsterm beim kanonischen Verfahren erst durch Einsetzen der Feldgleichungen im Maxwell-Teil erzeugt wird, wobei dieser dann erst die symmetrische Form (1.26) annimmt, welche bei der metrischen Ableitung direkt entsteht. Wir betrachten weiter den Maxwell-Anteil für den Fall der Kopplung an einen äußeren Strom $J_{\mu}(x)$ (lokale Kopplung an das Potential $A^{\mu}(x)$)

(1.29)
$$\mathcal{L}^{M} = -\tfrac{1}{8} \{F_{\lambda\tau}, F^{\lambda\tau}\} + A^{\mu}(x) J_{\mu}(x)$$

und erhalten kanonisch

$$T_{\mu\nu}^{M} = \tfrac{1}{8} g_{\mu\nu} \{F_{\lambda\tau}, F^{\lambda\tau}\} - \tfrac{1}{2} \{F_{\mu\lambda}, \partial_\nu A^\lambda\}$$

(1.30)
$$+ \tfrac{1}{2} \partial^\lambda \{F_{\mu\lambda}, A_\nu\} - g_{\mu\nu} J_\lambda A^\lambda$$

$$= \tfrac{1}{8} g_{\mu\nu} \{F_{\lambda\tau}, F^{\lambda\tau}\} + \tfrac{1}{2} \{F_{\mu\lambda}, F^{\lambda}{}_{\nu}\} + J_\mu A_\nu - g_{\mu\nu} J_\lambda A^\lambda$$

Die metrische Ableitung liefert nur dann ebenfalls (1.30), wenn der Wechselwirkungsstrom genau wie in (1.24) auf das lokale Koordinatensystem bezogen wird.

(1.31)
$$J_\mu A^\mu \rightarrow J^\alpha(x) \left(e_\alpha{}^\nu(x) A_\nu(x)\right)$$

d.h. wenn die $J^\alpha(x)$ wirklich als unabhängige c-Zahl Parameterfunktionen und nicht als Welt-Vierervektor $J^\mu(x)$ interpretiert werden. Der Ansatz $J_\mu A^\mu = g_{\mu\nu} J^\mu A^\nu$ würde ja einen symmetrischen Tensor $\frac{1}{2}(J_\mu A_\nu + J_\nu A_\mu)$ ergeben. $T_{\mu\nu}(x)$ darf aber bei Anwesenheit von Quellen nicht mehr symmetrisch sein, da das System Drehimpuls abgeben kann /25, 26/

(1.32)
$$\partial^\lambda M_{\lambda\mu\nu}(x) = T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu} = Q(x) S_{\mu\nu} \psi(x)$$

Wir werden im Folgenden hauptsächlich von der Form (1.28) Gebrauch machen. Zu den Antikommutatoren im Maxwell-Anteil (1.30) ist zu bemerken, daß sich diese explizite hermitesche Form der Operatorordnung im ET. später als unbedingt notwendig für die Konsistenz von Kommutator-Relationen erweisen wird. Bei Wahl der Lagrangedichte (1.23) lautet dann die Dirac-Gleichung dementsprechend

(1.33)
$$i \not{\partial} \psi - \tfrac{e}{2} \not{A}(x), \psi(x)\} - m \psi(x) = 0$$

$$i \bar{\psi} \overleftarrow{\not{\partial}} - \tfrac{e}{2} \{\bar{\psi}(x), \not{A}(x)\} - m \bar{\psi}(x) = 0$$

Obwohl die Operatoren $j_\mu(x), A_\mu(x)$ in kanonischer Quantisierung vertauschen, hängt das Ergebnis der Variation nach dem Feld ψ (x) von der genauen Reihenfolge ab (siehe Notation (1.11))

$$\frac{\delta}{\delta\psi}\{j_\mu(x), A^r(x)\} = \frac{e}{2}\gamma_\mu\{\bar\psi(x), A^r(x)\} \tag{1.34}$$

Bevor wir auf die Erhaltungssätze eingehen, geben wir hier noch eine Zusammenfassung der kanonischen Quantisierung in Coulomb-Eichung $\partial^k A_k(x) = 0$ /63/

$$\{\bar\psi(x), \psi(y)\}_{x^\circ=y^\circ} = \gamma^\circ\delta^3(\vec x-\vec y)\,;\quad \{\psi,\psi\} = \{\bar\psi,\bar\psi\} = 0$$

$$\begin{aligned}[E^{ok}(x), A^k(y)]_{x^\circ=y^\circ} &= i(g^{kl}\delta^3(\vec x-\vec y))^T \\ &= i\left(g^{kl}\delta^3(\vec x-\vec y) - \partial^k\partial^l D(\vec x-\vec y)\right)\end{aligned} \tag{1.35}$$

mit der Coulomb-Greenfunktion

$$\partial_k\partial^k D(\vec x-\vec y) = \delta^3(\vec x-\vec y)\,,\quad D(\vec x-\vec y) = \frac{1}{4\pi|\vec x-\vec y|} \tag{1.36}$$

A° ist abhängig von den übrigen Feldern ($x^\circ=y^\circ$)

$$\partial^k\partial_k A^\circ(x) = -(J^\circ(x)+j^\circ(x))\,;\quad A^\circ(x) = -\int d^3y\,(J^\circ(y)+j^\circ(y))D(\vec x-\vec y) \tag{1.37}$$

Daher vertauscht A° nicht mehr mit ψ , $\bar\psi$ zu gleichen Zeiten

$$\begin{aligned}[A^\circ(x), \psi(y)]_{x^\circ=y^\circ} &= -e\psi(y)D(\vec x-\vec y) \\ [A^\circ(x), \bar\psi(y)]_{x^\circ=y^\circ} &= e\bar\psi(y)D(\vec x-\vec y)\end{aligned} \tag{1.38}$$

wobei wir mit kanonischer Quantisierung (1.35) die Relationen gefunden hatten

$$\begin{aligned}[j^r(x), \psi(y)]_{x^\circ=y^\circ} &= e\gamma^\circ\gamma^r\psi(x)\delta^3(\vec x-\vec y) \\ [j^r(x), \bar\psi(y)]_{x^\circ=y^\circ} &= -e\bar\psi(x)\gamma^r\gamma^\circ\delta^3(\vec x-\vec y)\end{aligned} \tag{1.39}$$

Diese Nichtvertauschbarkeit von $\psi(x)$ mit dem Maxwellfeld $A^\mu(x)$ macht die Rechnung im Folgenden erheblich komplizierter. Die Coulombeichung ist jedoch für Operatorrechnungen unbedingt notwendig, da nur in ihr die kanonische Quantisierung konsistent durchgeführt werden kann.

Wir bemerken noch abschließend, daß die Einführung eines äußeren Stromes $J^\mu(x)$ in die Maxwell-Theorie nicht vollständig konsistent ist. Aus der Maxwellgleichung

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = -(J_\nu + j_\nu) \tag{1.40}$$

folgt nämlich die Bedingung

$$\partial^\nu (J_\nu(x) + j_\nu(x)) = 0$$

so daß entweder $\partial^\nu J_\nu = 0$ gelten muß oder $J_\nu(x)$ einen Zusammenhang mit dem ankoppelnden Spinorfeld besitzt

$$\partial^\nu J_\nu(x) = -\partial^\nu j_\nu(x)$$

Für die Anwesenheit von Spinorquellen in $\mathcal{L}^D$

$$\mathcal{L}^{D\prime} = \mathcal{L}^D + \bar{\psi}(x)\eta(x) + \bar{\eta}(x)\psi(x) \tag{1.41}$$

bedeutet das eine Verknüpfung der Quellen und Spinorfelder

$$\partial^\nu J_\nu(x) = -ie\left(\bar{\eta}(x)\psi(x) - \bar{\psi}(x)\eta(x)\right) = -\partial^\nu j_\nu(x) \tag{1.42}$$

Wir können daher $J^\mu, \eta, \bar{\eta}$ nicht als vollständig unabhängige Funktionen vorgeben. Das wird sich später in der Ableitung von Kommutator-Relationen, bei denen die Maxwellgleichungen verwendet werden müssen, bemerkbar machen. Für die Erhaltungssätze spielt diese Bedingung jedoch keine Rolle.

I.2. Erhaltungssätze für den ET mit äußeren Quellen

In diesem Abschnitt werden die Operatoreigenschaften von $T_{\mu\nu}$ bei Anwesenheit äußerer Quellen untersucht, welche wir später bei der Behandlung der verallgemeinerten Ward-Identitäten benötigen werden. Der zusätzliche Quellenterm in der Lagrangedichte ist linear in den fundamentalen Feldern und lautet

$$\mathcal{L}_Q(x) = \bar{q}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)q(x) + j_\mu(x)A^r(x) + A_\mu(x)J^r(x) \tag{1.43}$$

wobei die Spinorquellen q, $\bar{q}$ und die Variationsableitungen mit ψ, $\bar{\psi}$ vollständig antikommutieren /77/. Für den ET erhalten wir dann entsprechend (1.28) den neuen Tensor

$$T'_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\mathcal{L}_Q(x) \tag{1.44}$$

und für die Dirac-Gleichung

$$\begin{aligned} i\partial\psi - \tfrac{e}{2}\gamma_\mu\{A^r + \mathcal{A}^r, \psi\} - m\psi &= -q(x) \\ \bar{\psi}i\overleftarrow{\partial} - \tfrac{e}{2}\{\bar{\psi}, A^r + \mathcal{A}^r\} - m\bar{\psi} &= -\bar{q}(x) \end{aligned} \tag{1.45}$$

wobei für die metrische Ableitung die Bemerkung bei (1.24) zu beachten ist. Für das Maxwellfeld erhalten wir Gleichung (1.40). Wir betrachten nun die Erhaltungssätze.

1. Symmetrie-Relation

Wir finden die expliziten Symmetrieeigenschaften von $T_{\mu\nu}$ durch Einsetzen der Dirac-Gleichungen (1.45) in den Symmetrisieungsterm

$$\partial^\lambda[\bar\psi,\{\gamma_\lambda,[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\}\psi] =$$

$$= \Big[\bar\psi(x),\Big(-2\overleftarrow{\not\partial}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]+\overleftarrow{\partial^\lambda}[[\gamma_\mu,\gamma_\nu],\gamma_\lambda]+$$
$$+2[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\vec{\not\partial}+[\gamma_\lambda,[\gamma_\mu,\gamma_\nu]]\vec{\partial^\lambda}\Big)\psi(x)\Big]$$

(1.46)
$$= i\Big[\bar\psi,\big(2i\overleftarrow{\not\partial}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]-[\gamma_\mu,\gamma_\nu]2i\vec{\not\partial}\big)\psi\Big]+$$
$$+4\Big(\big[\partial^\lambda\bar\psi,(\gamma_\mu g_{\nu\lambda}-\gamma_\nu g_{\mu\lambda})\psi\big]+\big[\bar\psi,(-\gamma_\mu g_{\nu\lambda}+\gamma_\nu g_{\mu\lambda})\overrightarrow{\partial^\lambda}\psi\big]\Big)$$

$$= 2i\Big(\Big[\big(\tfrac{e}{2}\{\bar\psi,\not A+\not{\mathcal{A}}\}+m\bar\psi-\bar\eta\big)[\gamma_\mu,\gamma_\nu],\psi\Big]-$$
$$-\Big[\bar\psi[\gamma_\mu,\gamma_\nu],\big(\tfrac{e}{2}\{\not A+\not{\mathcal{A}},\psi\}+m\psi-\eta\big)\Big]\Big)+$$
$$+8\big[\bar\psi,(\gamma_\nu\overleftrightarrow{\partial_\mu}-\gamma_\mu\overleftrightarrow{\partial_\nu})\psi\big]$$

Wir entwickeln den Wechselwirkungsanteil in (1.46)

(1.47)
$$ie\Big(\big[\{\bar\psi,\not A+\not{\mathcal{A}}\},[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\psi\big]-\big[\bar\psi[\gamma_\mu,\gamma_\nu],\{\not A+\not{\mathcal{A}},\psi\}\big]\Big)$$

mit den Formeln

$$[\{a,b\},c] = \{a,[b,c]\}+\{b,[a,c]\}$$

(1.48)
$$[a,\{b,c\}] = \{[a,b],c\}+\{b,[a,c]\}$$

und erhalten (mit der Dirac-Algebra $[\gamma_\lambda,[\gamma_\mu,\gamma_\nu]] = 4(g_{\lambda\mu}\gamma_\nu-g_{\lambda\nu}\gamma_\mu)$)

$$ie\Big(-e\mathcal{D}(0)\{\bar\psi(x),[\gamma^0,[\gamma_\mu,\gamma_\nu]]\psi(x)\}+\{A^\lambda+\mathcal{A}^\lambda,[\bar\psi,[\gamma_\lambda,[\gamma_\mu,\gamma_\nu]]\psi]\}\Big)$$

(1.49)
$$= -ie^2\mathcal{D}(0)4\delta^3(0)\,\mathrm{Sp}\big[g_{\mu\alpha}\gamma^0\gamma_\nu-g_{\nu\alpha}\gamma^0\gamma_\mu\big]+$$
$$+4ie\{A^\lambda+\mathcal{A}^\lambda,[\bar\psi,(g_{\lambda\mu}\gamma_\nu-g_{\lambda\nu}\gamma_\mu)\psi]\}$$

$$= -8i\Big(\{A_\mu+\mathcal{A}_\mu,j_\nu\}+\{A_\nu+\mathcal{A}_\nu,j_\mu\}\Big)$$

Damit folgt für den ET. die explizit symmetrisierte Form

$$T_{\mu\nu}(x) = \tfrac{1}{8} g_{\mu\nu} \{F_{\lambda\tau}, F^{\lambda\tau}\} + \tfrac{1}{2}\{F_{\mu\lambda}, F^{\lambda}{}_{\nu}\} + \tfrac{1}{2}\left(\{A_\mu, j_\nu\} + \{A_\nu, j_\mu\}\right)$$

$$+ \tfrac{i}{4}\left[\bar\psi(x), (\gamma_\mu \overleftrightarrow{\partial_\nu} + \gamma_\nu \overleftrightarrow{\partial_\mu})\psi(x)\right] - g_{\mu\nu}\mathcal{L}^{D} \tag{1.50}$$

$$- g_{\mu\nu}\mathcal{L}_{Q} + J_\mu A_\nu + \tfrac{1}{2}(j_\nu A_\mu - j_\mu A_\nu) + \tfrac{\lambda}{8}\left(\bar q[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\psi - \bar\psi[\gamma_\mu, \gamma_\nu] q\right)$$

und damit die Symmetrie-Relation

$$T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu} = (A_\nu J_\mu - A_\mu J_\nu) - (A_\nu j_\mu - A_\mu j_\nu) + \tag{1.51}$$

$$+ \tfrac{i}{4}\left(\bar q[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\psi - \bar\psi[\gamma_\mu, \gamma_\nu] q\right)$$

entsprechend der Gleichung (1.22) mit den Spin-Matrizen

$$(S_{\mu\nu})^{\lambda\tau} = g_\mu{}^\lambda g_\nu{}^\tau - g_\mu{}^\tau g_\nu{}^\lambda \qquad \text{für Vektorfelder} \tag{1.52}$$

$$S_{\mu\nu} = \tfrac{1}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \qquad \text{für Spinorfelder}.$$

Wir sehen damit, daß die kanonischen Bedingungen für die Symmetrieeigenschaft von $T_{\mu\nu}(x)$ erfüllt sind, wobei die singulären Terme in (1.49) bei Auswertung der Spur wegfallen. Wir werden solchen Termen, die von der Nichtvertauschbarkeit von $\psi(x)$ mit $A^{0}(x)$ stammen, noch öfters begegnen und sie kurz als "Coulomb-Terme" bezeichnen.

2. Erhaltungssatz

Wir betrachten zunächst den Term mit der Lagrangedichte $-g_{\mu\nu}\left(\mathcal{L}^{D}(x) + \mathcal{L}_{Q}(x)\right)$ und setzen die Feldgleichungen ein. Dazu ordnen wir den Wechselwirkungsanteil $\tfrac{1}{2}\{j_\mu(x), A^{\mu}(x)\}$ folgendermaßen um

$$\tfrac{1}{2}\{j_\mu, A^r\} = -\tfrac{e}{4}\{[\bar\psi(x), \gamma_r \psi(x)], A^r(x)\}$$

$$= -\tfrac{e}{8}\Big([\bar\psi\gamma_r, \{A^r, \psi\}] + [[A^\circ, \bar\psi], \gamma_0\psi\} + [\{\bar\psi, A^r\}, \gamma_r\psi] - \{\bar\psi\gamma^\circ, [A^\circ, \psi]\}\Big)$$

(1.53)

$$= -\tfrac{e^2}{4}\mathfrak{D}(0)\{\bar\psi(x)\gamma^\circ\psi(x)\} - \tfrac{e}{8}\Big([\bar\psi, \gamma_r\{A^r, \psi\}] + [\{\bar\psi, A^r\}\gamma_r, \psi]\Big)$$

so daß wir für $\mathcal{L}^D + \mathcal{L}^Q$ erhalten ($A_\mu' = A_\mu + A_\mu$)

$$\mathcal{L}^D(x) + \mathcal{L}^Q(x) =$$

$$= \tfrac{1}{2}[\bar\psi, (i\overrightarrow{\partial\!\!\!/} - m)\psi] + \tfrac{1}{2}\{j_\mu, A^{r\prime}\} + \bar\psi q + \bar q\psi + J_\mu A^r$$

(1.54)

$$= \tfrac{1}{4}[(\bar\psi i\overleftarrow{\partial\!\!\!/} - \tfrac{e}{2}\{\bar\psi, A^{r\prime}\}\gamma_r - m\psi), \psi] +$$

$$+ \tfrac{1}{4}[\bar\psi, (i\overrightarrow{\partial\!\!\!/}\psi - \tfrac{e}{2}\{A^{r\prime}, \gamma_r\psi\} - m\psi]$$

$$+ J_\mu A^r + \bar\psi q + \bar q\psi - e^2\mathfrak{D}(0)\delta^3(0)$$

und mit (1.45) folgt dann die Beziehung

$$\mathcal{L}^D(x) + \mathcal{L}^Q(x) = \tfrac{1}{2}(\bar\psi q + \bar q\psi) + J_\mu A^r - e^2\mathfrak{D}(0)\delta^3(0) \qquad (1.55)$$

Wir können den singulären Term $-e^2\mathfrak{D}(0)\delta^3(0)$ nur vermeiden, indem wir die Lagrangedichte anders definieren. Dabei soll das Variationsverfahren allerdings dieselben Feldgleichungen ergeben, da sonst an anderer Stelle neue "Coulomb-Terme" auftreten. Wir können im Prinzip direkt (1.54) ohne $-e^2\mathfrak{D}(0)\delta^3(0)$ verwenden, da diese divergente Konstante nicht zu den Feldgleichungen beiträgt. Wir ersetzen daher

$$\tfrac{1}{2}\{j_\mu(x), A^r(x)\} \Rightarrow -\tfrac{e}{8}\Big([\{\bar\psi, A^r\}\gamma_r, \psi] + [\bar\psi, \gamma_r\{A^r, \psi\}]\Big) \qquad (1.56)$$

$$= -\tfrac{e}{2}\big(\bar\psi\gamma_\mu A^r\psi - \psi A^r\bar\psi\gamma_\mu\big)$$

wobei die rechte Seite maximal entwickelt wurde und keine "Coulomb-Terme" auftraten. Wo es notwendig ist, werden wir daher in Zukunft diese Form der Wechselwirkung verwenden. (Die bisherigen Eigenschaften von $T_{\mu\nu}(x)$ einschließlich Symmetrie-Identität werden dadurch nicht geändert.)
Wir bilden nun die Divergenz von $T_{\mu\nu}$

$$\partial^\mu T_{\mu\nu}(x) = \tfrac{1}{4}\{\partial_\nu F_{\lambda\tau}, F^{\lambda\tau}\} - \tfrac{1}{2}\{\partial^\tau F_{\mu\lambda}, \partial_\nu A^\lambda\} - \tfrac{1}{2}\{F_{\mu\lambda}, \partial^\tau \partial_\nu A^\lambda\} +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left[\bar\psi, \left(-i\overleftarrow{\not\partial}\,\overrightarrow{\partial_\nu} + i\overleftarrow{\partial_\nu}\,\overrightarrow{\not\partial}\right)\psi\right] - \partial_\nu A_\lambda J^\lambda - A_\lambda \partial_\nu J^\lambda + \tag{1.57}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\partial_\nu(\bar\psi q + \bar q \psi)$$

wobei der Symmetrisierungsterm im Dirac-Teil wegen der totalen Antisymmetrie der Indizes nicht beiträgt. Nach Einsetzen der Feldgleichungen bleiben folgende Beiträge übrig

$$\partial^\mu T_{\mu\nu}(x) = -\partial_\nu J_\lambda A^\lambda - \partial_\nu A^\lambda j_\lambda - (\partial_\nu \bar q \cdot \psi + \bar\psi \partial_\nu q) \tag{1.58}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\{j_\lambda, \partial_\nu A^\lambda\} + \tfrac{e}{4}\left(-\left[\{\bar\psi, A^\lambda\}\gamma_\lambda, \overrightarrow{\partial_\nu}\psi\right] + \left[\bar\psi\overleftarrow{\partial_\nu}, \gamma_\lambda\{A^\lambda, \psi\}\right]\right).$$

Das zu erwartende kanonische Resultat wäre allgemein

$$\partial^\mu T_{\mu\nu}(x) = -\frac{\partial \mathcal{L}_a}{\partial x^\nu} \tag{1.59}$$

(Differentiation nach der expliziten Abhängigkeit von x^μ!)

d.h. in (1.58) die rechte Seite ohne die beiden letzten Terme. Wir prüfen nach, ob diese sich herausheben und formen den letzten Term folgendermaßen um

$$-\left[\{\bar\psi, A^\lambda\}\gamma\overrightarrow{\partial_\lambda}\psi\right] + \left[\bar\psi\overleftarrow{\partial_\nu}\gamma_\lambda\{A^\lambda, \psi\}\right] = \tag{1.60}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(-\left[\{\bar\psi, A^\lambda\}\gamma_\lambda, \partial_\nu\psi\right] + \left[\partial_\nu\{\bar\psi, A^\lambda\}\gamma_\lambda\psi\right] + \left[\bar\psi\gamma_\lambda, \partial_\nu\{A^\lambda, \psi\}\right] - \left[\partial_\nu\bar\psi, \gamma_\lambda\{A^\lambda, \psi\}\right]\right)$$

mit den Kommutator-Formeln (1.48) finden wir

$$= \frac{1}{2}\Big(-\{\bar\psi,\gamma_\lambda[A^\lambda,\partial_\nu\psi]\} - \{A^\lambda,[\bar\psi,\gamma_\lambda\partial_\nu\psi]\} - \{[\partial_\nu\bar\psi,A^\lambda],\gamma_\lambda\psi\} -$$
$$- \{A^\lambda,[\partial_\nu\bar\psi,\gamma_\lambda\psi]\} + \{\partial_\nu\bar\psi\gamma_\lambda,[A^\lambda,\psi]\} + \{A^\lambda,[\partial_\nu\bar\psi,\gamma_\lambda\psi]\}$$
$$+ \{\bar\psi\gamma_\lambda,[\partial_\nu A^\lambda,\psi]\} + \{\partial_\nu A^\lambda,[\bar\psi,\gamma_\lambda\psi]\} + \{[\bar\psi,A^\lambda],\gamma_\lambda\partial_\nu\psi\}$$
(1.61) $$+ \{A^\lambda,[\bar\psi,\gamma_\lambda\partial_\nu\psi]\} + \{[\bar\psi,\partial_\nu A^\lambda],\gamma_\lambda\psi\} + \{\partial_\nu A^\lambda,[\bar\psi,\gamma_\lambda\psi]\}\Big)$$

$$= \{\partial_\nu A^\lambda,[\bar\psi,\gamma_\lambda\psi]\} + \frac{1}{2}\Big(-\{\bar\psi\gamma_\lambda,[A^\lambda,\partial_\nu\psi]\} - \{[\partial_\nu\bar\psi,A^\lambda],\gamma_\lambda\psi\}$$
$$+ \{\partial_\nu\bar\psi\gamma_\lambda,[A^\lambda,\psi]\} + \{\bar\psi\gamma_\lambda,[\partial_\nu A^\lambda,\psi]\}$$
$$+ \{[\bar\psi,A^\lambda],\gamma_\lambda\partial_\nu\psi\} + \{[\bar\psi,\partial_\nu A^\lambda],\gamma_\lambda\psi\}\Big)$$

Folgende Kommutatoren sind leicht aus den Feldgleichungen und der kanonischen Quantisierung (1.35) abzuleiten.

(1.62)
$$[\partial_\nu A^\lambda(x),\psi(y)]_{x^\circ=y^\circ} = -e\,g^{\lambda\circ}\left(g_{\nu k}\psi(y) - g_{\nu\circ}\gamma^\circ\gamma_k\psi(y)\right)\partial^k\delta(\vec x-\vec y)$$
$$[A^\lambda(x),\partial_\nu\psi(y)]_{x^\circ=y^\circ} = -e\,g^{\lambda\circ}\left(\partial_\nu\psi(y) - (g_{\nu k}-g_{\nu\circ}\gamma^\circ\gamma_k)\psi(y)\overrightarrow{\partial^k}\right)\delta(\vec x-\vec y)$$

Im Limes $\vec x \to \vec y$ folgt dann für (1.61) folgende Struktur der "Coulomb-Terme"

(1.63)
$$= -\frac{1}{2}\{\partial_\nu A^\lambda,[\bar\psi,\gamma_\lambda\psi]\} +$$
$$+2e\left(-\{\bar\psi(x),\gamma^\circ\psi(x)\}g_{\nu k}\partial^k\delta(0) + \{\bar\psi,\gamma_k\psi\}g_{\nu\circ}\partial^k\delta(0)\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\{\partial_\nu A^\lambda,[\bar\psi,\gamma_\lambda\psi]\} - 8e\,g_{\nu k}\delta^3(0)\partial^k\delta(0)$$

Unter der Voraussetzung, daß $\partial^k \vartheta(0)$ aus Symmetriegründen Null gesetzt werden kann, erhalten wir folgenden Erhaltungssatz

$$\partial^\nu T_{\mu\nu}(x) = -\partial_\nu J_\lambda A^\lambda - \partial_\nu A^\lambda j_\lambda - (\partial_\nu \bar{\psi}\psi + \bar{\psi}\partial_\nu) \tag{1.64}$$

entsprechend der kanonischen Formel (1.59). Es muß aber betont werden, daß dieser singuläre "Coulomb-Term" $\sim \partial^k \vartheta(0)\delta^3(0)$ diesmal nicht durch Umdefinition der Lagrangedichte beseitigt werden kann, da er direkt durch Einsetzen der Feldgleichungen im kanonischen Teil des ET entstand, dessen Form festgelegt ist. Wir werden aber später bei den Vertauschungsrelationen für $T_{\mu\nu}(x)$ aus den Bewegungsgleichungen $[P^\nu, T_{\mu\nu}(x)]$ das obige Symmetrieargument bestätigt finden.

Wir fügen noch an, daß sich für die Spur $T^\nu{}_\mu(x)$ des ET. mit der Wahl (1.56) für die Wechselwirkung folgendes Ergebnis ableiten läßt

$$T^\nu{}_\mu(x) = \tfrac{m}{2}[\bar{\psi},\psi] - 3J_\mu A^\nu - A_\mu j^\nu - \tfrac{5}{2}(\bar{\psi}\partial + \bar{\partial}\psi) - e^2\vartheta(0)\delta^3(0) \tag{1.65}$$

mit einem nichtverschwindenden "Coulomb-Term".

Kapitel II Generator-Relationen und kanonische Kommutatoren

II 1. Poincaré-Invarianz und Bewegungsgleichungen

Nachdem wir uns im ersten Abschnitt mit der Konstruktion eines geeigneten E.T. befaßt haben, fragen wir nun nach dessen lokalen Eigenschaften als quantenmechanischer Generator für raum-zeitliche Symmetrietransformationen. Aus dem quantenmechanischen Wirkungsprinzip (1.4) folgt für die Wirkung von G auf ein beliebiges lokales Feld der Kommutator /61,64,78, 79,84/

$$\delta_G A(x) = i[G, A(x)] \tag{2.1}$$

Die Relationen der G mit allen übrigen Operatoren und untereinander charakterisieren alle Symmetrieeigenschaften des Systems in globaler Weise. In Analogie etwa zur lokalen elektromagnetischen Stromdichte besitzt jedoch $T_{\mu\nu}(x)$ auch als lokaler Operator Bedeutung. Diese lokalen Eigenschaften können hinreichend durch eine sogenannte "Strom-Algebra" beschrieben werden /64/. Im Unterschied zu den integrierten Generatoren ist jedoch diese lokale Algebra durch die kanonische Prozedur nicht mehr eindeutig ableitbar. Vielmehr stellen sich sogar Widersprüche ein zwischen kanonischen Ergebnissen und prinzipiellen Postulaten der Quantenfeldtheorie. Als Beispiel erwähnen wir den Kommutator der Ladungsdichte mit der Stromdichte, welcher kanonisch für gleiche Zeiten verschwindet.

$$[j^0(x), j^i(y)]_{x^0=y^0} = 0 \tag{2.2}$$

Man kann jedoch zeigen /5,61/, daß dies im Fall der Stromerhaltung $\partial^\mu j_\mu(x) = 0$ im Widerspruch zu den Grundlagen steht und daß höhere Ableitungen der δ -Funktion auftreten müssen. Diese sogenannten "Schwinger-Terme" sind auch bei vielen anderen Relationen zu erwarten. Über ihre Operator-Struktur läßt sich jedoch sehr schwer eine Aussage machen, da bei nichtkanonischen Verfahren immer spezielle Matrixelemente der

Kommutatoren betrachtet werden /19,20,24,28,29,45,46,47,48, 50,51,52,56,57,61,62,68,73,74/. In engem Zusammenhang damit steht auch die Frage nach der Konstruktion kovarianter, zeitgeordneter Produkte von lokalen Operatoren. Hier können additive Terme zum "naiven" T-Produkt hinzukommen, direkt zusammenhängen mit den möglichen "Schwinger-Termen" in Kommutatoren zwischen denselben Operatoren /54,58,59,60,61,64/. Im folgenden werden wir uns vor allem damit befassen, kanonische Ansätze im Zusammenhang mit der lokalen Algebra des E.T. zu formulieren und im speziellen Fall der Quantenelektrodynamik explizit zu untersuchen. Hauptansatz ist dafür das allgemeine Verhalten lokaler Felder unter Poincaré-Transformationen sowie eventuell noch unter Skalen- bzw- Konformen Transformationen /85/.

Wir beginnen mit einer allgemeinen Diskussion des Kommutators $[T_{\mu\nu}(x), \phi(y)]$ mit einem beliebigen Operator $\phi(y)$, welcher z.B. als Tensorprodukt von Feldern und deren Ableitungen gedacht sein kann, und machen den allgemeinen Ansatz

$$(2.3)\quad \left[T_{\mu\nu}(x), \phi(y)\right]_{x=y^\circ} = -i\left\{a_{\mu\nu}(x)\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) + b_{\mu\nu,k}(y)\,\partial^k\delta(\vec{x}-\vec{y}) + c_{\mu\nu,kl}(y)\,\partial^k\partial^l\delta(\vec{x}-\vec{y}) + \ldots\right.$$

(die b(y),c(y) etc. mit nur einem Argument sind allgemein genug, da jeder andere Ansatz durch Umdefinition der Faktoren auf diese Form zu bringen ist). Wenn man nur fordert, daß $\phi(y)$ ein definiertes Transformationsverhalten unter Poincaré-Transformationen besitzt, so folgen die integrierten Bedingungen

$$(2.4)\quad \text{(i)}\qquad \left[P_\mu, \phi(y)\right] = \int_\sigma d\sigma^\nu \left[T_{\nu\mu}(x), \phi(y)\right] = -i\,\partial_\mu\phi(y)\,; \quad y\in\sigma$$

$$\text{(ii)}\qquad \left[M_{\mu\nu}, \phi(y)\right] = \int_\sigma d\sigma^\lambda \left[\left(x_\mu T_{\lambda\nu}(x) - x_\nu T_{\lambda\mu}(x)\right), \phi(y)\right]$$

$$= -i\left(y_\mu\vec{\partial}_\nu - y_\nu\vec{\partial}_\mu + \Sigma^\phi_{\mu\nu}\right)\phi(y)$$

wobei $\Sigma^\phi_{\mu\nu}$ die Tensoreigenschaften von ϕ beschreibt. Wir

geben eine Liste der für uns wichtigen Fälle an.

Spinoren: $$\sum^{1/2}_{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$

Vektoren: $$\left(\sum^{1}_{\mu\nu}\right)^{\lambda\tau} = \left(g_\mu{}^\lambda g_\nu{}^\tau - g_\mu{}^\tau g_\nu{}^\lambda\right)$$

(2.5) Spinor-Vektor: $$\left(\sum^{3/2}_{\mu\nu}\right)^{\lambda\tau} = \frac{1}{4} g^{\lambda\tau}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] + \left(g_\mu{}^\lambda g_\nu{}^\tau - g_\nu{}^\lambda g_\mu{}^\tau\right)$$

Tensor: $$\left(\sum^{2}_{\mu\nu}\right)^{\lambda\tau,\rho\sigma} = \left(\sum^{1}_{\mu\nu}\right)^{\lambda\rho} g^{\tau\sigma} + \left(\sum^{1}_{\mu\nu}\right)^{\tau\sigma} g^{\lambda\rho}$$

$$= \left(g_\mu{}^\lambda g_\nu{}^\rho - g_\mu{}^\rho g_\nu{}^\lambda\right) g^{\tau\sigma} + \left(g_\mu{}^\tau g_\nu{}^\sigma - g_\mu{}^\sigma g_\nu{}^\tau\right) g^{\lambda\rho}$$

Die Auswertung der Bedingungen (2.4) stößt auf die Schwierigkeit, daß der Ansatz (2.3) speziell für die Hyperfläche $x^0 = y^0$ gemacht wurde, so daß wir auch beim Integral über die Hyperfläche in (2.4) diese Wahl treffen müssen.

(2.6) $$\int_\sigma d\sigma^\lambda \longrightarrow g^{\lambda 0} \int d^3x$$

Damit erhalten wir für die Koeffizienten in (2.3) folgende Bedingungen

(2.7)
$$a_{\mu 0}(x) = \partial_\mu \phi(x)$$
$$b_{00,k}(y) = \sum^{\phi}_{ok} \cdot \phi(y)$$
$$b_{oi,k} - b_{ok,i} = \sum^{\phi}_{ik} \phi(y)$$

Der symmetrische Anteil von $b_{oi,k}$ kann durch weitere Bedingungen eingeschränkt werden. In Frage kommen z.B. Skalen- und Konforme Transformationen. Diese sind nur Symmetrien für Modelle, in denen alle Massen verschwinden. Generator-Relationen lassen sich jedoch auch für gebrochene Symmetrien aufstellen (etwa in Analogie zur "chiralen Gruppe" in der starken Wechselwirkung /64,85/). Die entsprechenden "Ströme" und Erhaltungssätze sind

(2.8) Skalentransformation: $D_\mu(x) = x^\lambda T_{\lambda\mu}(x)$; $\partial^\mu D_\mu(x) = T^\mu{}_\mu(x)$

Konforme Transformation: $K_{\mu\nu}(x) = (2x_\nu x_\lambda - g_{\nu\lambda}x^2)\, T^\lambda{}_\mu(x)$

$\partial^\mu K_{\mu\nu}(x) = 2x_\nu T^\mu{}_\mu(x)$

Das Transformationsverhalten von $\phi(y)$ soll dann sein

$$[D, \phi(y)] = -i\,(y_\mu \vec{\partial}^\mu + d_\phi)\,\phi(y)$$

(2.9)
$$[K_\nu, \phi(y)] = -i\left[(2y_\mu y_\nu - g_{\mu\nu}x^2)\vec{\partial}^\mu + 2y^\mu(g_{\mu\nu}d_\phi - \Sigma^\phi_{\mu\nu})\right]\phi(y)$$

mit der kanonischen "Dimension" d_ϕ des Feldes $\phi(y)$.
($d = \frac{3}{2}$ für Spinoren, $d = 3$ für Ströme, $d = 4$ für Energie-Impuls-Dichte etc.).
Durch entsprechende Integration von (2.3) über die "Ströme" (2.8) findet man für den symmetrischen Anteil von $b_{oi,k}$ die Bedingung

(2.10)
$$b_{ok,}{}^k = -d_\phi\,\phi(y)$$

Konforme Kovarianz liefert noch eine Bedingung für den Koeffizienten $c_{ov,ik}$

(2.11)
$$(g_\nu{}^k g^{\lambda\ell} + g_\nu{}^\ell g^{\lambda k})\, c_{o\lambda,k\ell} = c_{ov,}{}^k$$

oder

(2.12)
$$c_{oo,}{}^k = 0 \quad ; \quad c_{ok,i}{}^k + c_{ok,}{}^k{}_i = c_{oi,}{}^k$$

Da diese Bedingungen algebraischer Natur sind und ohne Einsetzen von Feldgleichungen erfüllt sein müssen, bedeutet (2.12), daß $c_{oo,ik}$ antisymmetrisch sein muß

(2.13)
$$c_{oo,ik} = -c_{oo,ki} = 0$$

Für noch allgemeinere Transformationen als die der Poincaré-

bzw. Konformen Gruppe müßte aber $T_{\mu\nu}(x)$ selbst neu definiert werden, vergleichbar der Definition (1.16) im Fall völlig allgemeiner Kovarianz.

Wir untersuchen nun mit kanonischer Quantisierung die abgeleiteten Bedingungen für die Felder, welche in der Quantenelektrodynamik eine Rolle spielen. Wir fragen, ob der aus dem Wirkungsprinzip (kanonisch oder metrisch) aus den fundamentalen Feldern konstruierte E.T. die entsprechenden gleichzeitigen Kommutatoren erfüllt. Kompliziert ist diese Rechnung in Eichtheorien, bei denen die fundamentalen Felder nicht alle vertauschen, weil sich dann auch in Kommutatoren mit $T_{\mu\nu}(x)$ die verschiedenen Teilsysteme vermischen. Dabei treten in Coulombeichung auch explizit nichtlokale Terme auf (d.h. solche, die nicht δ -Funktionen bzw. Ableitungen davon sind). Man kann aber trotz dieser nicht-kovarianten und nichtlokalen Eigenschaften zeigen, daß die Generator-Relationen aller Observablen kovariant erfüllt sind.

Bei der Rechnung stellen wir aber sofort eine technische Schwierigkeit fest. Da $T_{\mu\nu}(x)$ nach unserer Definition auch Zeitableitungen der Felder enthält, ist man für Spinorfelder gezwungen, die Feldgleichungen zu verwenden, bevor man die kanonischen Vertauschungsrelationen anwenden kann. Das stellt bereits eine gewisse Erweiterung des kanonischen Verfahrens dar, bei dem sonst Konsistenz aller Generator-Relationen mit den Feldgleichungen erst nach Auswertung aller Kommutatoren gezeigt werden kann. Man kann diesen Sachverhalt umgehen, indem man T_{oo}, T_{ok} als getrennt vorgegebene Größen annimmt und nur Raumableitungen verwendet /2,11/. Die Konsistenz muß sich dann umgekehrt darin zeigen, daß sich beide Teile von $T_{\mu\nu}$ zu den richtigen Tensor-Transformationseigenschaften ergänzen. Da für uns jedoch die Tensoreigenschaft von $T_{\mu\nu}$ wesentliches Element der Konstruktion war, werden wir darauf nicht weiter eingehen.

Wir spalten den symmetrischen E.T. (1.50) in seine einzelnen Anteile auf

$$T^{D}_{\mu\nu} = \frac{i}{4}\left[\bar\psi,(\gamma_\mu \overleftrightarrow{\partial_\nu}+\gamma_\nu\overleftrightarrow{\partial_\mu})\psi\right]$$

$$T^{M}_{\mu\nu} = \frac{1}{8}g_{\mu\nu}\{F_{\lambda\tau},F^{\lambda\tau}\}+\frac{1}{2}\{F_{\mu\lambda},F^{\lambda}{}_{\nu}\}$$

(2.14)
$$T^{W}_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\left(\{A_\mu,j_\nu\}+\{A_\nu,j_\mu\}\right)$$

$$T^{Q}_{\mu\nu} = J_\mu A_\nu - g_{\mu\nu}J_\lambda A^\lambda + \frac{1}{2}\left(\bar q\,\Sigma^{\nu_2}_{\mu\nu}\psi-\bar\psi\,\Sigma^{\nu_2}_{\mu\nu}q\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\Sigma^{\lambda}_{\mu\nu}\right)^{\lambda\tau}A_\lambda j_\tau-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(\bar\psi q+\bar q\psi\right)$$

Für Kommutatoren mit $\psi,\bar\psi$ benötigen wir folgende elementare Kommutatoren, die mit Hilfe der Dirac-Gleichung in aufgelöster Form

$$\partial^0\psi = -\gamma^0\gamma^k\partial_k\psi - i\tfrac{e}{2}\{A^{r\prime}(x),\psi(x)\}-i\gamma^0 m\psi+i\gamma^0 q(x)$$

(2.15)
$$\partial^0\bar\psi = -\partial_k\bar\psi\gamma^k\gamma^0+i\tfrac{e}{2}\{\bar\psi,A^{r\prime}\}\gamma_\mu\gamma^0+i\bar\psi\gamma^0 m-i\bar q\gamma^0$$

berechnet werden können. Aus

$$\{\bar\psi_\alpha(x),\partial^0\psi_\beta(y)\}_{x^0=y^0} = \{\bar\psi_\alpha(x),\left(-\gamma^0\gamma^k\partial_k\psi-i\tfrac{e}{2}\gamma^0\gamma_\mu\{A^{r\prime},\psi\}-i\gamma^0 m\psi+i\gamma^0 q\right)_\beta(y)$$

(2.16)
$$= -(\gamma^0\gamma^k)_{\beta\lambda}\partial_k(y)\{\bar\psi_\alpha(x),\psi_\lambda(y)\}-i\tfrac{e}{2}(\gamma^0\gamma_\mu)_{\beta\lambda}\{\bar\psi_\alpha,\{A^{r\prime},\psi_\lambda\}\}-i\gamma^0_{\beta\lambda}m\{\bar\psi_\alpha,$$

folgt mit der Algebra $\{a,\{b,c\}\} = [[a,b],c]+\{b,\{a,c\}\}$ und $\gamma^0_{\alpha\lambda}=\gamma^0_{\lambda\alpha}$

$$= -(\gamma^0\gamma^k)_{\beta\lambda}\gamma^0_{\lambda\alpha}\partial_k(y)\delta(\vec x-\vec y)-i\gamma^0_{\beta\lambda}m\,\gamma^0_{\alpha\lambda}\delta(\vec x-\vec y)-$$
$$-\frac{ie}{2}(\gamma^0\gamma_\mu)_{\beta\lambda}\left([[\bar\psi_\alpha(x),A^{r\prime}(y)],\psi_\lambda(y)]+\{A^{r\prime}(y),\{\bar\psi_\alpha(x),\psi_\lambda(y)\}\}\right.$$

$$= \gamma^k_{\beta\alpha}\partial_k\delta(\vec x-\vec y)-i\delta_{\alpha\beta}m\delta(\vec x-\vec y)+\tfrac{ie^2}{2}[\bar\psi_\alpha(x),\psi_\beta(y)]\mathcal{D}(\vec x-\vec y)-\tfrac{ie}{2}(\gamma^0\gamma_\mu)_{\beta\lambda}2A^{r\prime}(y)\gamma^0_{\alpha\lambda}\delta(\vec x-$$

$$\{\bar\psi_\alpha(x),\partial^0\psi_\beta(y)\}_{x^0=y^0} =$$

(2.17)
$$= \left(-\gamma^k_{\beta\alpha}\vec\partial_k(x)-ie(\gamma^0\gamma_\mu\gamma^0)_{\beta\alpha}A^{r\prime}(y)-i\delta_{\alpha\beta}m\right)\delta(\vec x-\vec y)+\tfrac{ie^2}{2}[\bar\psi_\alpha(x),\psi_\beta(y)]\mathcal{D}(\vec x-\vec y$$

Wir sehen, daß bereits in dem simplen Kommutator (2.17) nichtlokale "Coulomb-Terme" auftreten. Die Rechnung wurde hier ausführlich gezeigt, um den Typus dieser Nichtlokalität deutlich zu machen. Dabei geht wesentlich die Operatorordnung des Wechselwirkungstermes in der Feldgleichung ein. Ebenso finden wir die analogen Relationen

$$\{\bar\psi_\alpha(x), \partial^0\psi_\beta(y)\} = \left(-\gamma^k_{\beta\alpha}\vec\partial_k(x) - ie(\gamma^0 A' \gamma^0)_{\beta\alpha} - i\delta_{\alpha\beta}m\right)\delta(\vec x-\vec y) + \frac{ie^2}{2}\left[\bar\psi_\alpha(x), \psi_\beta(y)\right] D(\vec x-\vec y)$$

(2.18)

$$\{\psi_\alpha(x), \partial^0\bar\psi_\beta(y)\} = \left(-\gamma^k_{\alpha\beta}\vec\partial_k(x) + ie(\gamma^0 A' \gamma^0)_{\alpha\beta} + im\delta_{\alpha\beta}\right)\delta(\vec x-\vec y) - \frac{ie^2}{2}\left[\bar\psi_\beta(y), \psi_\alpha(x)\right] D(\vec x-\vec y)$$

Weiter bleiben auch in Kommutatoren $\{\psi, \partial^0\psi\}$ und $\{\bar\psi, \partial^0\bar\psi\}$ "Coulomb-Terme" übrig

$$\{\partial^0\psi_\alpha(x), \psi_\beta(y)\}_{x^0=y^0} = ie^2\psi_\alpha(x)\psi_\beta(y)\, D(\vec x-\vec y)$$

(2.19)

$$\{\partial^0\bar\psi_\alpha(x), \bar\psi_\beta(y)\}_{x^0=y^0} = ie^2\bar\psi_\alpha(x)\bar\psi_\beta(y)\, D(\vec x-\vec y)$$

Wir untersuchen nun $[T_{00}, \psi]$ und erhalten für den Dirac-Anteil in T_{00} mit Hilfe der eben berechneten Relationen

$$\begin{aligned}
\left[T^D_{00}(x), \psi_\beta(y)\right]_{x^0=y^0} &= \tfrac{i}{2}\left[\left[\bar\psi(x), \gamma_0 \overleftrightarrow{\partial_0}\psi(x)\right], \psi_\beta(y)\right] \\
&= \tfrac{i}{4}\Big(\{\bar\psi\gamma^0, \{\partial_0\psi, \psi_\beta\}\} - \{\gamma_0\partial_0\psi, \{\bar\psi, \psi_\beta\}\} - \\
&\quad - \{\partial^0\bar\psi\gamma^0, \{\psi, \psi_\beta\}\} + \{\{\partial^0\bar\psi, \psi_\beta\}, \gamma^0\psi\}\Big) \qquad (2.20) \\
&= -\tfrac{i}{2}\partial^0\psi_\beta\,\delta(\vec x-\vec y) + \tfrac{i}{4}\left\{(\gamma^0\psi(x))_\alpha, \left(\gamma^k_{\beta\alpha}\vec\partial_k(x) + ie(\gamma^0 A' \gamma^0)_{\beta\alpha} + im\delta_{\alpha\beta}\right)\delta(\vec x-\vec y)\right\} + \\
&\quad + C^D_{00}(x,y)
\end{aligned}$$

wobei der gesamte Coulombterm folgendermaßen aussieht

$$C^D_{00}(x,y) = -\frac{e^2}{4} D(\vec x-\vec y)\left(\{\bar\psi(x)\gamma^0, \psi(x)\psi_\beta(y)\} - \tfrac{1}{2}\left\{\left[\bar\psi(x), \psi_\beta(y)\right], \gamma^0\psi(x)\right\}\right) \qquad (2.21)$$

(Summation der Spinorindizes immer über Spinoren mit gleichem Ortsargument!)

Mit der Formel

$$\psi(x)\,\partial_k\delta(x-y) = -\partial_k\psi(x)\,\delta(x-y) + \psi(y)\,\partial_k\delta(x-y)$$

können wir die Dirac-Gleichung schließlich rückwärts anwenden und erhalten

$$(2.22)\qquad \left[T_{oo}^{D}(x),\psi(y)\right]_{x^o=y^o} = -i\,\partial^o\psi(x)\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) + \tfrac{i}{2}\,\gamma^k\gamma^o\psi(y)\,\partial_k\delta(\vec{x}-\vec{y}) - \tfrac{1}{2}\,\gamma^o q(x)\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) + C_{oo}^{D}(x,y)$$

Wir benötigen nun den Maxwell-Anteil, von dem wir einen nichtverschwindenden Beitrag über den folgenden Kommutator erhalten

$$(2.23)\qquad \left[F_{o\ell}(x),\psi(y)\right]_{x^o=y^o} = e\,\psi(y)\,\partial_\ell\,\mathfrak{D}(\vec{x}-\vec{y}) \quad ; \quad [F_{ik},\psi] = 0$$

Damit finden wir folgenden nichtlokalen Anteil

$$(2.24)\qquad \left[T_{oo}^{M}(x),\psi(y)\right]_{x^o=y^o} = -\tfrac{e}{2}\left\{F_{o\ell}(x),\psi(y)\right\}\partial^\ell\mathfrak{D}(\vec{x}-\vec{y})$$

Für den Wechselwirkungsanteil $T_{\mu\nu}^{W}(x)$ finden wir folgenden Kommutator (wobei die Diskussion bei Gleichung (1.56) irrelevant ist, da der c-Zahl-Term mit ψ vertauscht)

$$(2.25)\qquad \begin{aligned}\left[T_{oo}^{W}(x),\psi(y)\right]_{x^o=y^o} &= \tfrac{1}{2}\left[\left\{A^o(x),j^o(x)\right\},\psi(y)\right]\\ &= \tfrac{1}{2}\left\{A^o(x),\left[j^o(x),\psi(y)\right]\right\} + \tfrac{1}{2}\left\{\left[A^o(x),\psi(y)\right],j^o(x)\right\}\end{aligned}$$

und mit dem kanonischen Kommutator

$$(2.26)\qquad \left[j_\mu(x),\psi(y)\right]_{x^o=y^o} = e\,\gamma^o\gamma_\mu\,\psi(x)\,\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

schließlich die Relation

$$(2.27)\qquad \begin{aligned}\left[T_{oo}^{W}(x),\psi(y)\right]_{x^o=y^o} &= e\left\{A^o(x),\psi(y)\right\}\delta(\vec{x}-\vec{y}) + C_{oo}^{W}(x,y)\\ C_{oo}^{W}(x,y) &= -\tfrac{e}{2}\left\{\psi(y),j^o(x)\right\}\mathfrak{D}(\vec{x}-\vec{y})\end{aligned}$$

Der restliche Kommutator mit

$$(2.28)\qquad T_{oo}^{Q}(x) = -j_k A^k - \tfrac{1}{2}\left(\bar{\psi}q + \bar{q}\psi\right)$$

ist am einfachsten auszuwerten und ergibt den kanonischen Beitrag

$$[T^{Q}_{oo}(x), \psi(y)]_{x^o=y^o} = \tfrac{1}{2}\gamma^o q(x)\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) \tag{2.29}$$

Wir fassen (2.22),(2.24),(2.27) mit (2.29) zusammen und erhalten

$$\begin{aligned}[T_{oo}(x), \psi(y)]_{x^o=y^o} = &-i\partial_o\psi(x)\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) + \tfrac{i}{2}\gamma^k\gamma^o\psi(y)\,\partial_k\delta(\vec{x}-\vec{y}) + \\ &+ \tfrac{e}{2}\{A^o(x), \psi(x)\}\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) - \tfrac{e}{2}\{F_{oc}(x), \psi(y)\}\,\partial^c\Delta(\vec{x}-\vec{y}) + \\ &+ C_{oo}(x,y)\end{aligned} \tag{2.30}$$

Von den "Coulomb-Termen" können wir explizit zeigen, daß sie sich herausheben. Dazu formen wir den Dirac-Teil in C_{oo} um

$$C^{D}_{oo}(x,y) = -\frac{e^2}{4}\Delta(\vec{x}-\vec{y})\left(\tfrac{1}{2}\{\bar{\psi}(x)\gamma^o,[\psi(x),\psi(y)]\} - \tfrac{1}{2}\{[\bar{\psi}(x),\psi(y)],\gamma^o\psi(x)\}\right) \tag{2.31}$$

mit den Formeln

$$\begin{aligned}\{a,[b,c]\} &= -[\{a,c\},b] + \{[a,b],c\} \\ \{[a,b],c\} &= [a,\{b,c\}] - \{[a,c],b\}\end{aligned} \tag{2.32}$$

folgt nämlich

$$\begin{aligned}\{\bar{\psi}\gamma^o,[\psi(x),\psi(y)]\} &= \{[\bar{\psi}(x)\gamma^o,\psi(x)],\psi(y)\} \\ \{[\bar{\psi}(x),\psi(y)],\gamma^o\psi(x)\} &= -\{[\bar{\psi}(x)\gamma^o,\psi(x)],\psi(y)\}\end{aligned}$$

$$C^{D}_{oo} = -\frac{e^2}{4}\Delta(\vec{x}-\vec{y})\{[\bar{\psi}(x)\gamma^o,\psi(x)],\psi(y)\} = \frac{e}{2}\Delta(\vec{x}-\vec{y})\{j^o(x),\psi(y)\} \tag{2.33}$$

und damit

$$C^{D}_{oo} + C^{W}_{oo} = 0 \tag{2.34}$$

Wir machen zum Ergebnis (2.30) folgende Feststellungen

1. Es bleiben keine Quellen-Terme übrig, was für kanonische Kommutatoren der Fall sein muß, wenn keine Ableitungskopplung in $\mathcal{L}_Q$ vorkommt.
2. "Coulomb-Terme" fallen nur bei genau definierter Operatorordnung heraus. Dazu trägt die Operatorordnung im

Maxwell-Teil ebenso bei wie die Wahl der Wechselwirkung in der Dirac-Gleichung. Dieses Ergebnis stützt ganz wesentlich unsere Argumente für diese Wahl der Operatorordnung. Wir werden zeigen, daß sie auch bei allen anderen Relationen als einzige konsistent ist.

3. Die Wahl $T_{oo}^{W} = \frac{1}{2}\{A^o, j^o\}$ ist wesentlich, obwohl ja formal j^o mit A^o vertauscht.
4. Der kanonische Kommutator (2.30) für das Spinorfeld ist nichtlokal. Zwar entspricht der lokale Anteil, wie wir noch genauer studieren werden, den zu Beginn des Kapitels diskutierten allgemeinen Bedingungen, dennoch muß die Poincaré-Invarianz der Theorie wegen dieser Nichtlokalität genauer überprüft werden.

Wir geben nun, ohne im einzelnen auf die analog verlaufenden Rechnungen einzugehen, die übrigen Kommutatoren mit dem Spinorfeld $\psi(x)$ an

$$\left[T_{oi}^{D}(x), \psi(y)\right]_{x^o=y^o} = -i\psi(x)\delta(\vec{x}-\vec{y}) + \frac{i}{4}\left(\gamma_i^k + \gamma^k\gamma_i\right)\psi(y)\,\partial_k\delta(\vec{x}-\vec{y}) - \frac{1}{4}\gamma_i\gamma(x)\delta(\vec{x}-\vec{y})$$
$$+ \frac{e}{4}\left(\gamma_i\gamma^o\{A^o(x), \psi(x)\} + \{A^i(x), \psi(x)\}\right)\delta(\vec{x}-\vec{y}) + C_{oi}^{D}(x;y)$$

$$C_{oi}^{D}(x;y) = -\frac{e^2}{16}D(\vec{x}-\vec{y})\left(2\{\bar{\psi}(x)\gamma_i, \psi(x)\psi(y)\} - \{\left[\bar{\psi}(x), \gamma_i\psi(y)\right], \psi(x)\}\right)$$

$$\left[T_{oi}^{M}(x), \psi(y)\right]_{x^o=y^o} = -e\,F_{ik}(x)\,\psi(y)\,\partial^k D(\vec{x}-\vec{y}) \tag{2.35}$$

$$\left[T_{oi}^{W}(x), \psi(y)\right]_{x^o=y^o} = \frac{e}{4}\left(\{A_i(x), \psi(x)\} + \gamma^o\gamma_i\{A^o(x), \psi(x)\}\right)\delta(\vec{x}-\vec{y})$$
$$- \frac{e^2}{4}\{\bar{\psi}(y), j_i(x)\}\,D(\vec{x}-\vec{y})$$

$$\left[T_{oi}^{Q}(x), \psi(y)\right]_{x^o=y^o} = -\frac{1}{8}\gamma^o\left[\gamma_i, \gamma_o\right]q(x)\delta(\vec{x}-\vec{y}) - \frac{e}{2}\left(A_i - \gamma^o\gamma_i A^o\right)\psi(x)\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

Wir finden wieder, daß sich alle Quellen- und "Coulomb-Terme" herausheben

$$\left[T_{oi}(x), \psi(y)\right]_{x^o=y^o} = -i\partial_i\psi(x)\delta(\vec{x}-\vec{y}) - i\left(\frac{1}{8}\left[\gamma_i, \gamma_k\right] - \frac{1}{2}g_{ik}\right)\psi(y)\,\partial^k\delta(\vec{x}-\vec{y})$$
$$+ \frac{e}{2}\{A_i(x), \psi(x)\}\delta(\vec{x}-\vec{y}) - \frac{e}{2}\{F_{ik}(x), \psi(y)\}\,\partial^k D(\vec{x}-\vec{y}) \tag{2.36}$$

wobei wir den Term proportional $\partial^k\delta(\vec{x}-\vec{y})$ in den symmetrischen und antisymmetrischen Teil aufgespalten haben. Wir können dann (2.30) und (2.36) mit der allgemeinen Form (2.3) und den Bedingungen (2.7) und (2.10) vergleichen. Wir finden

$$b^{\Psi}_{oi,k} = \left(\tfrac{1}{8}[\gamma_i,\gamma_k]-\tfrac{1}{2}g_{ik}\right)\psi(y)\ ;\ b^{\Psi}_{oo,k} = \Sigma^{1/2}_{ok}\psi(y) \tag{2.37}$$

und daher die kanonischen Beziehungen

$$b^{\Psi}_{oi,k} - b^{\Psi}_{ok,i} = \Sigma^{1/2}_{ik}\psi(y)\ ;\ b^{\Psi}_{ok,}{}^{k} = -\tfrac{3}{2}\psi(y) = -c\mathrm{l}_{\Psi}\psi(y) \tag{2.38}$$

Wir können (2.30) und (2.36) noch zu einer einzigen, kovarianten Beziehung zusammenfassen

$$\begin{aligned}[T_{o\mu}(x),\psi(y)]_{x^o=y^o} &= -i\partial_\mu\psi(x)\delta(\vec{x}-\vec{y}) - \tfrac{i}{2}\left((1+g_{\mu o})\Sigma^{1/2}_{\mu k}-g_{\mu k}\right)\psi(y)\partial^k\delta(\vec{x}-\vec{y}) \\ &+ \tfrac{e}{2}\{A_\mu(x),\psi(x)\}\delta(\vec{x}-\vec{y}) - \tfrac{e}{2}\{F_{\mu k}(x),\psi(y)\}\partial^k\delta(\vec{x}-\vec{y})\end{aligned} \tag{2.39}$$

Die entsprechenden Gleichungen für $\bar{\Psi}$ können wir direkt durch hermitesche Konjugation bestimmen.

$$[T_{o\mu}(x),\bar{\Psi}(y)] = [T_{o\mu},\Psi^+]\gamma^o = -[T_{o\mu},\Psi]^+\gamma^o \tag{2.40}$$

Dabei gilt $T_{\mu\nu}=T^+_{\mu\nu}$ nur, wenn die hermitesche Konjugation auch auf die Spinorquellen übertragen wird $(\bar{\Psi}q+\bar{q}\Psi)^+\gamma^o=(\bar{\Psi}q+\bar{q}\Psi)\gamma^o$ Dann folgt mit der γ -Algebra $\gamma^o\gamma_\mu^+\gamma^o=\gamma_\mu$

$$\begin{aligned}[T_{o\mu}(x),\bar{\Psi}(y)]_{x^o=y^o} &= -i\partial_\mu\bar{\Psi}(x)\delta(\vec{x}-\vec{y}) - \tfrac{i}{2}\bar{\Psi}(y)\left((1+g_{\mu o})\overleftarrow{\Sigma^{1/2}_{\mu k}}-g_{\mu k}\right)\partial^k\delta(\vec{x}-\vec{y}) \\ &- \tfrac{e}{2}\{\bar{\Psi}(y),A_\mu(x)\}\delta(\vec{x}-\vec{y}) + \tfrac{e}{2}\{\bar{\Psi}(y),F_{\mu k}(x)\}\partial^k\delta(\vec{x}-\vec{y})\end{aligned} \tag{2.41}$$

mit der Pfeil-Notation für eine beliebige Dirac-Matrix Γ

$$\overleftarrow{\Gamma} = \gamma^o\Gamma^+\gamma^o \tag{2.24}$$

Wir ergänzen dieses Ergebnis mit dem Kommutator für T_{ik}, der zwar keine direkte Bedeutung für die Generator-Relationen mit den Feldern besitzt, später aber für die Tensoreigenschaften

von $T_{\mu\nu}$ selbst wichtig wird.

$$
\begin{aligned}
\left[T_{ik}(x),\psi(y)\right]_{x^0=y^0} &= -\tfrac{i}{2}\gamma^0\left\{\gamma_i\left(\vec{\partial}_k+ieA_k\right)\psi+\gamma_k\left(\vec{\partial}_i+ieA_i\right)\psi\right\}\delta(\vec{x}-\vec{y}) \\
&\quad +\tfrac{i}{4}\gamma^0\left(\gamma_i g_{ke}+\gamma_k g_{ie}\right)\psi(y)\,\partial^e\delta(\vec{x}-\vec{y}) \\
&\quad +\tfrac{e}{2}\left\{\left(F_{io}(x)g_{ke}+F_{ko}(x)g_{ie}-g_{ik}F_{ae}(x)\right),\psi(y)\right\}\partial^e\Delta(\vec{x}-\vec{y})
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

und der analogen Relation für $\bar{\psi}(y)$.

Aus dem Kommutator (2.39) bzw. (2.41) können wir nun auch den kanonischen Kommutator für den Strom $j_\lambda(x)=-\frac{e}{2}\left[\bar{\psi}(x),\gamma\psi(x)\right]$ ableiten

$$
\begin{aligned}
\left[T_{o\mu}(x),j_\lambda(y)\right]_{x^0=y^0} &= -\tfrac{e}{2}\Big(\left[\left[T_{o\mu}(x),\bar{\psi}(y)\right],\gamma_\lambda\psi(y)\right]+\left[\bar{\psi}(y)\gamma_\lambda,\left[T_{o\mu}(x),\psi(y)\right]\right]\Big) \\
&= -\tfrac{e}{2}\Big(\Big[\Big(-i\partial_\mu\bar{\psi}\,\delta(\vec{x}-\vec{y})-\tfrac{i}{2}\bar{\psi}(y)\Big((1+g_{\mu o})\overleftarrow{\textstyle\sum}^{1/2}_{\mu k}-g_{\mu k}\Big)\partial^k\delta(\vec{x}-\vec{y})- \\
&\qquad -\tfrac{e}{2}\left\{\bar{\psi}(y),A_\mu(x)\right\}\delta(\vec{x}-\vec{y})+\tfrac{e}{2}\left\{\bar{\psi}(y),F_{\mu k}(x)\right\}\partial^k\Delta(\vec{x}-\vec{y})\Big),\gamma_\lambda\psi(y)\Big] \\
&\quad +\Big[\bar{\psi}(y)\gamma_\lambda,\Big(-i\partial_\mu\psi\,\delta(\vec{x}-\vec{y})-\tfrac{i}{2}\Big((1+g_{\mu o})\textstyle\sum^{1/2}_{\mu k}-g_{\mu k}\Big)\psi(y)\partial^k\delta(\vec{x}-\vec{y})+ \\
&\qquad +\tfrac{e}{2}\left\{A_\mu(x),\psi(x)\right\}\delta(\vec{x}-\vec{y})-\tfrac{e}{2}\left\{F_{\mu k}(x),\psi(y)\right\}\partial^k\Delta(\vec{x}-\vec{y})\Big)\Big]\Big)
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

Die nichtlokalen Anteile heben sich erwartungsgemäß heraus, z.B.

$$
\tfrac{e}{2}\Big(-\left[\left\{\bar{\psi},A_\mu\right\},\gamma_\lambda\psi\right]+\left[\bar{\psi}\gamma_\lambda,\left\{A_\mu,\psi\right\}\right]\Big)=\tfrac{e}{2}\left[\left\{\bar{\psi}\gamma_\lambda,\psi\right\},A_\mu\right]=0 \tag{2.45}
$$

da $\left\{\bar{\psi}(x),\gamma_\lambda\psi(x)\right\}$ eine (singuläre) c-Zahl ist.
Da keine höheren als erste Ableitungen der δ-Funktion vorkommen können, erwarten wir für den Kommutator (2.44) nach (2.7) folgende Gestalt

$$
\left[T_{o\mu}(x),j^\lambda(y)\right]_{x^0=y^0}=-i\partial_\mu j^\lambda\delta(\vec{x}-\vec{y})-i\Big[\tfrac{1}{2}\left(1+g_{\mu o}\right)\left(\textstyle\sum^{1}_{\mu k}\right)^{\lambda\tau}j_\tau(y)+\tfrac{e}{4}g_\mu{}^i\Big[\bar{\psi},\left(b^\lambda_{oi,k}+b^\lambda_{ok,i}\right)\psi\Big]\Big]\partial^k\delta(\vec{x}-\vec{y}) \tag{2.46}
$$

Aus (2.44) ersieht man unmittelbar, daß folgender Zusammenhang gelten muß

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\left(1+g_{\mu o}\right)\Big(\overleftarrow{\textstyle\sum}^{1/2}_{\mu k}\gamma^\lambda+\gamma^\lambda\overrightarrow{\textstyle\sum}^{1/2}_{\mu k}\Big)-g_{\mu k}\gamma^\lambda= \\
&=\tfrac{1}{2}\left(1+g_{\mu o}\right)\left(\textstyle\sum^{1}_{\mu k}\right)^{\lambda\tau}\gamma_\tau-\tfrac{1}{2}g_\mu{}^i\left(b^\lambda_{oi,k}+b^\lambda_{ok,i}\right)
\end{aligned}
\tag{2.47}
$$

Explizit finden wir mit Hilfe der Dirac-Algebra die Spin 1-Matrix von (2.5) bestätigt

$$(2.48)\quad \tfrac{1}{4}\left([\gamma_k,\gamma_\mu]\gamma^\lambda+\gamma^\lambda[\gamma_\mu,\gamma_k]\right)=\tfrac{1}{4}\left[\gamma^\lambda,[\gamma_\mu,\gamma_k]\right]=\left(g^\lambda_\mu\gamma_k-g^\lambda{}_k\gamma_\mu\right)$$

und damit unabhängig die Gleichheit der symmetrischen Anteile

$$(2.49)\quad \tfrac{1}{2}\left(b^\lambda_{oi,k}+b^\lambda_{ok,i}\right)=\gamma^\lambda g_{ik}$$

Wir erhalten daher für (2.46) endgültig

$$(2.50)\quad \left[T_{o\mu}(x),j^\lambda(y)\right]=-i\partial_\mu j^\lambda\delta(\vec{x}-\vec{y})-i\left[\tfrac{1}{2}(1+g_{\mu o})(\Sigma^1_{\mu k})^{\lambda\tau}j_\tau(y)-g_{\mu k}j^\lambda(y)\right]\partial^k\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

Da nur lokale Terme auftreten, haben wir damit bereits bewiesen, daß (2.50) bei Integration auf die richtigen Poincaré-Bewegungsgleichungen für $j^\lambda(y)$ führt und wir das kanonische Skalenverhalten mit der Dimension $d_j = 3$ erhalten.
Da das Integral $\int d^3y\, j^o(y)$ den Generator der Eichtransformation darstellt, können wir die Eichinvarianz von $T_{o\mu}(x)$ durch Integration von (2.50) über $\int d^3y$ prüfen.

$$\begin{aligned}\left[T_{o\mu}(x),Q\right] &= -i\partial_\mu j^o(x)-i\partial^k(x)\left[\tfrac{1}{2}(1+g_{\mu o})(\Sigma^1_{\mu k})^{o\tau}j_\tau(x)-g_{\mu k}j^o(x)\right]\\ &= -i\partial_\mu j^o(x)-\tfrac{i}{2}(1+g_{\mu o})\,g_\mu{}^o\partial^k j_k(x)+ig_{\mu k}\partial^k j^o(x)\\ &= -i\,g_{\mu o}\,\partial^\mu j_\mu(x)\end{aligned}\qquad(2.51)$$

Im Falle der Stromerhaltung ist daher auch $T_{o\mu}$ eichinvariant.
Wir fügen der Vollständigkeit halber noch den Kommutator mit T_{ik} an

$$\begin{aligned}\left[T_{ik}(x),j_\lambda(y)\right] = -i\Big\{&\Big(g_{\lambda o}\tfrac{1}{2}(\partial_k j_i+\partial_i j_k)+\tfrac{e}{4}g_\lambda{}^\ell\left[\bar\psi,\gamma^o(\gamma_\ell\gamma_i\overrightarrow{\partial}_k-\gamma_i\gamma_\ell\overleftarrow{\partial}_k+(i\leftrightarrow k))\psi\right]\Big)\delta(\vec{x}-\vec{y})\\ &-\tfrac{1}{2}\left(g_\lambda{}^o(g_{k\ell}j_i(y)+g_{i\ell}j_k(y))-(g_{\lambda i}g_{k\ell}+g_{\lambda k}g_{i\ell})j^o(y)\right)\partial^\ell\delta(\vec{x}-\vec{y})\Big\}+\\ &+\tfrac{e^2}{4}g_\lambda{}^\ell\left\{A_k(x)\left[\bar\psi(x),\gamma^o[\gamma_\ell\gamma_i]\psi(x)\right]+A_i(x)\left[\bar\psi(x),\gamma^o[\gamma_\ell,\gamma_k]\psi(x)\right]\right\}\delta(\vec{x}-\vec{y})\end{aligned}\qquad(2.52)$$

Analog zu (2.51) erhält man wieder Eichinvarianz $\left[T_{ik},Q\right]=0$, diesmal aber unabhängig vom Erhaltungssatz für den Strom.

Wir wenden uns nun dem Maxwell-Feld zu und führen die analogen Untersuchungen durch. Für den transversalen Teil des Vektorpotentials trägt im Kommutator mit dem E.T. nur der Anteil $T^{\mu}_{\mu\nu}(x)$ bei. Mit der kanonischen Quantisierung (1.35) folgt dann

$$[T_{o\mu}(x), A_k(y)] = \left[\tfrac{1}{8} g_{o\mu}\{F_{\lambda\tau}(x), F^{\lambda\tau}(x)\} + \tfrac{1}{2}\{F_{oi}(x), F^{i}_{\mu}(x)\}, A_k(y)\right]$$

(2.53)

$$= -i F_{\mu i}(x)\,(g^{i}_{k}\delta(\vec{x}-\vec{y}))^{\top} = -i F_{\mu i}(x)\left(g^{i}_{k}\delta(\vec{x}-\vec{y}) - \partial^{i}\partial_{k}\mathfrak{D}(\vec{x}-\vec{y})\right)$$

und für $T_{ik}(x)$ die Gleichung

$$[T_{ik}(x), A_\ell(y)] = i g_{ik} F_{oj}(x)\,(g^{j}_{\ell}\delta(\vec{x}-\vec{y}))^{\top} - i F^{o}_{k}(x)\,(g_{i\ell}\delta(\vec{x}-\vec{y}))^{\top} -$$

(2.54)

$$- i F_{oi}(x)\,(g_{k\ell}\delta(\vec{x}-\vec{y}))^{\top}$$

Für den Kommutator mit $A^{o}(x)$ können wir (2.50) verwenden und erhalten durch Integration

$$[T_{o\mu}(x), A^{o}(y)] = -\int d^{3}z\,\mathfrak{D}(\vec{y}-\vec{z})\{-i\partial_{\mu}j^{o}(x)\delta(\vec{x}-\vec{z}) + i(g_{\mu k}j^{o}(z) - g_{\mu o}j_{k}(z))\partial^{k}\delta(\vec{x}-$$

(2.55)

$$= i\partial_{\mu}j^{o}(x)\,\mathfrak{D}(\vec{y}-\vec{x}) - i\partial^{k}(x)\{\mathfrak{D}(\vec{x}-\vec{y})(g_{\mu k}j^{o}(x) - g_{\mu o}j_{k}(x))\}$$

Für die Feldstärken verwendet man am besten die direkten Kommutatoren

$$[F_{o\ell}(x), F_{ok}(y)] = [F_{ik}, F_{m\ell}] = 0$$

(2.56)

$$[F_{ok}(x), F_{em}(y)]_{x^{o}=y^{o}} = -i\left(g_{km}\partial_{\ell}\delta(\vec{x}-\vec{y}) - g_{k\ell}\partial_{m}\delta(\vec{x}-\vec{y})\right)$$

welche unmittelbar aus der kanonischen Quantisierung (1.35) folgen. Man erhält folgende Relationen (A1) vorerst ohne Quellen-Beiträge

$$[T_{oo}(x), F_{ok}(y)] = -i\partial^{o}F_{ok}\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) - i F_{ik}(y)\partial^{i}\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

$$[T_{oo}(x), F_{ik}(y)] = -i\,\partial^{o}F_{ik}\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) - i\left(F_{oi}(y)\partial_{k}\delta(\vec{x}-\vec{y}) - F_{ok}(y)\,\partial_{i}\delta(\vec{x}-\vec{y})\right)$$

(2.57)

$$[T_{o\ell}(x), F_{ok}(y)] = -i\,\partial_{\ell}F_{ok}\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) - i\left(g_{\ell k}F_{oj}(y) - g_{\ell j}F_{ok}(y)\right)\partial^{j}\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

$$[T_{o\ell}(x), F_{ik}(y)] = -i\partial_{\ell}F_{ik}\delta(\vec{x}-\vec{y}) - i\left(F_{\ell i}(y)g_{kj} - F_{\ell k}(y)g_{ij}\right)\partial^{j}\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

Durch Vergleich mit der allgemeinen Form (2.3) findet man, daß

$$[T_{00}(x), F_{\lambda\tau}(y)] = -i\partial_0 F_{\lambda\tau}\delta(\vec{x}-\vec{y}) - i\left(\Sigma^2_{0k}\right)^{\lambda\tau,\rho\sigma} F_{\rho\sigma}(y)\partial^k\delta(\vec{x}-\vec{y}) \tag{2.58}$$

mit der Spin-Matrix für Tensor-Felder nach (2.5) durch (2.57) erfüllt ist. Ferner gilt

$$[T_{0\ell}(x), F_{\lambda\tau}(y)] = -i\partial_\ell F_{\lambda\tau}\delta(\vec{x}-\vec{y}) - \tfrac{i}{2}\left[\left(\Sigma^2_{\ell k}\right)^{\lambda\tau,\rho\sigma} F_{\rho\sigma}(y) + B^{\lambda\tau}_{\ell k}(y)\right]\partial^k\delta(\vec{x}-\vec{y}) \tag{2.59}$$

mit dem symmetrischen Anteil $B^{\lambda\tau}_{\ell k} = B^{\lambda\tau}_{k\ell}$, der ebenfalls aus (2.57) abzulesen ist

$$\begin{aligned} B^{0i}_{\ell k}(y) &= g_\ell{}^i F_{0k} + g_k{}^i F_{0\ell} - 2g_{k\ell} F_0{}^i \\ B^{ik}_{\ell j}(y) &= g^k{}_j F_\ell{}^i + g^k{}_\ell F_j{}^i - F_\ell{}^k g^i{}_j - F_j{}^k g^i{}_\ell \end{aligned} \tag{2.60}$$

Wir können nun prüfen, ob die weitergehende Bedingung (2.10), die aus konformer Kovarianz folgt, auch für $B^{\lambda\tau}_{ik}$ erfüllt ist. Tatsächlich folgt durch Spurbildung

$$\begin{aligned} g^{\ell j} B^{0i}_{\ell j} &= 2F_{0i} - 6F_{0i} = -4F_{0i} \\ g^{\ell j} B^{ik}_{\ell j} &= -2F^{ik} + 2F^{ki} = -4F^{ik} \end{aligned} \tag{2.61}$$

das kanonische Verhalten

$$g^{\ell j} B^{\lambda\tau}_{\ell j} = -2d_F F^{\lambda\tau} \quad ; \quad d_F = 2 \tag{2.62}$$

Da $F^{\lambda\tau}$ insgesamt nur lokale Vertauschungsrelationen mit dem E.T. liefert, ist also mit (2.58),(2.59) bereits bewiesen, daß sich die Feldstärken Poincaré- und Skalen-kovariant transformieren.

Wir wenden uns nun wieder den Feldern $A^\lambda(x)$, $\psi(x)$ zu, welche nicht-lokale Kommutatoren mit $T_{0\mu}(x)$ ergeben, und diskutieren ausführlicher die Heisenberg-Bewegungsgleichungen. Durch einfache Integration der Gleichungen (2.39),(2.53),(2.54) bestätigt man Translationsinvarianz

$$\begin{aligned} [P_\mu, \psi(y)] &= \int d^3x\, [T_{0\mu}(x), \psi(y)] = -i\partial_\mu\psi(y) \\ [P_\mu, A^\lambda(y)] &= -i\partial_\mu A^\lambda(y) \end{aligned} \tag{2.63}$$

wobei sich die nichtlokalen Anteile herauskürzen. Für Lorentz-Transformationen sind die Verhältnisse jedoch komplizierter. Für den entsprechenden Generator M_{ok} folgt nämlich

$$[M_{ok}, \psi(y)] = \int d^3x \{x^o [T_{ok}(x), \psi(y)] - x_k [T_{oo}(x), \psi(y)]\}$$

(2.64)
$$= -iy_o \partial_k \psi(y) + iy_k \partial^o \psi(y) - i \Sigma^{1/2}_{ok} \psi(y) +$$
$$+ \frac{e}{2} \int d^3x\, x_k \left[\{A_o, \psi\} \delta(\vec{x}-\vec{y}) - \{F_{oi}(x), \psi(y)\} \partial^i \Delta(\vec{x}-\vec{y})\right]$$

Diesmal fallen die nicht-kanonischen Anteile jedoch nicht weg, sondern ergeben eine zusätzliche Operator-Eichtransformation für das Feld $\psi(x)$ /13/

$$\frac{e}{2} \int d^3x\, x_k \left[\{A_o, \psi\} \delta(\vec{x}-\vec{y}) - \{F_{oi}(x), \psi(y)\} \partial^i \Delta(\vec{x}-\vec{y})\right] = -\frac{e}{2} \{\psi(y), \Lambda_k(y)\}$$

(2.65)
$$\Lambda_k(y) = \int d^3x \left[(y-x)_k j^o(x) - F_{ok}(x)\right] \Delta(\vec{x}-\vec{y})$$

ψ transformiert sich daher nicht als Darstellung der Lorentz-Gruppe. Wir stellen weiter fest, daß $\psi(x)$ sich bei räumlichen Rotationen M_{ik} kovariant transformiert und die nichtlokalen Terme nicht mehr beitragen.

(2.66)
$$[M_{ik}, \psi(y)] = -i \left(y_i \vec{\partial}_k - y_k \vec{\partial}_i + \Sigma^{1/2}_{ik}\right) \psi(y)$$

Für das Vektorpotential $A^\mu(x)$ ergeben sich ähnliche Resultate. Neben den kanonischen Anteilen für Lorentz-Kovarianz findet man wieder einen nichtlokalen Beitrag, welcher genau dem Gradienten $\partial^\mu \Lambda_k(y)$ derselben Operatoreichfunktion (2.65) entspricht (A2). Für die abhängige Komponente $A^o(x)$ ergibt sich dieser Beitrag auf folgende Weise

$$[M_{ok}, A^o(y)] = -\int d^3x\, [M_{ok}, j^o(x)]\, \Delta(\vec{x}-\vec{y})$$
$$= i \int d^3x\, \Delta(\vec{x}-\vec{y}) \left[x^o \partial_k j^o(x) - x_k \partial^o j^o(x) + j_k(x)\right]$$
(2.67)
$$= -i (y_o \partial_k - y_k \partial_o) A^o(y) + i \int d^3x \left[(y-x)_k \partial^o j^o(x) + j_k(x)\right] \Delta(\vec{x}-\vec{y})$$
$$= -i(y_o \partial_k - y_k \partial_o) A^o(y) + i \int d^3x \left[(y-x)_k \partial^o j^o(x) + \partial^\mu F_{k\mu}(x)\right] \Delta(\vec{x}-\vec{y})$$

$$= -i(y_0\partial_k - y_k\partial_0)A^0(y) - iA_k(y) + i\partial^0\Lambda_k(y)$$

wobei für den letzten Term $\int \partial^i F_{ki} D(\vec{x}-\vec{y})$ die Definitionsgleichung für die Coulomb-Greenfunktion (1.36) und die Bedingung $\partial^k A_k(x) = 0$ verwendet wurden. Insgesamt finden wir für das Transformationsverhalten von $A^\lambda(x)$

$$(2.68)\quad \left[M_{0k}, A_\lambda(y)\right] = -i(y_0\partial_k - y_k\partial_0)A_\lambda - i\left(\Sigma^1_{0k}\right)_{\lambda\tau}A^\tau + i\partial_\lambda\Lambda_k(y)$$

Obwohl die beiden Felder ψ, A_λ sich nicht kovariant transformieren, gilt dennoch, daß die physikalischen Aussagen kovariant sind. (2.64) und (2.68) ergänzen sich nämlich so, daß die Dirac-Gleichung gerade invariant unter Lorentz-Transformationen bleibt. Die Eichtransformation ist zusätzlich notwendig, damit die nicht-kovariante Coulomb-Eichung auch im transformierten System erhalten bleibt. Über reine Poincaré-Invarianz hinausgehend untersuchen wir nun noch den Einfluß der nicht-lokalen Terme in (2.39),(2.53),(2.55),(2.56) auf das Skalen- und konforme Transformationsverhalten. Gemäß den Definitionen (2.8),(2.9) finden wir

$$(2.69)\quad \left[D, \psi(y)\right] = -i(y^\mu\partial_\mu + \tfrac{3}{2})\psi(y) + \tfrac{e}{2}\left\{\psi(y), \left(y^k A_k(y) - \int d^3x\, x^k F_{ki}(x)\partial^i D(\vec{x}-\vec{y})\right)\right\}$$

Der Beitrag $\sim \frac{e}{2}$ fällt heraus wegen

$$\int d^3x\, x^k F_{ki}(x)\partial^i D(\vec{x}-\vec{y}) = -\int d^3x\left[\partial^i(x^k\partial_k A_i)D - A_k(x)\partial_i(x)(x^k\partial^i D)\right]$$

$$= \int d^3x\left[A_i\partial^i D(\vec{x}-\vec{y}) + x^k A_k(x)\partial^i\partial_i D(\vec{x}-\vec{y})\right] = y^k A_k(y)$$

Für den konformen Generator K^ν ergibt sich jedoch wieder ein zusätzlicher Beitrag (A2)

$$(2.70)\quad \left[K^\nu, \psi(y)\right] = \left[\text{kanon. Terme (2.9)}\right] - e(1+2g^{\nu 0})\left\{\psi(y), \int d^3x\, A^\nu(x) D(\vec{x}-\vec{y})\right\}$$

sowie einen entsprechenden Beitrag in

$$\left[K^\nu, A_\lambda(y)\right] = -i\left[\text{kan. Terme}\right] - 2i(1+2g^{\nu 0})\partial_\lambda\int d^3x\, A^\nu(x) D(\vec{x}-\vec{y})$$

II 2. Verallgemeinerte Dirac-Schwinger-Bedingungen

Bisher hatten wir Generator-Relationen des E.T. mit den fundamentalen Feldern der Quantenelektrodynamik untersucht. Indem wir nun $T_{\mu\nu}(x)$ selbst als relativistisches Feld betrachten, welches entsprechende Generator-Relationen erfüllen sollte, gelangen wir zu Kommutatoren der Komponenten von $T_{\mu\nu}(x)$ untereinander. Diese Beziehungen stellen die weitesten Möglichkeiten der quantenmechanischen Interpretation einer lokalen, relativistischen Theorie dar /2,3,4,9,11,12,20,23,24,28,29,41,43, 45,46,52/. Wir werden deshalb etwas genauer auf die Grundlagen eingehen, bevor wir uns mit expliziten Rechnungen in der Quantenelektrodynamik befassen.

Die allgemeine Formulierung des Problems wurde von Dirac gegeben /9/ und soll im folgenden kurz skizziert werden. Relativistische Invarianz bedeutet, daß Systeme, die sich in beliebigen, zueinander völlig raumartigen Gebieten befinden, unabhängig sind. Fordert man, daß diese Gebiete beliebig genau lokalisiert werden können, so folgt, daß für die Beschreibung dynamischer Systeme die Anfangsbedingungen auf einer beliebigen, raumartigen Hyperfläche vorgegeben werden können. Dieser quantenmechanische Zustand sei $|\sigma, q\rangle$, welcher explizit von den Größen, welche die Hyperfläche σ charakterisieren, und von den Eigenwerten eines vollständigen Satzes von q -Variablen des Systems abhängt. Der geometrischen Transformation der Hyperflächen ineinander entspricht ein unitärer Operator, welcher $|\sigma, q\rangle$ transformiert. Die infinitesimale geometrische Operation werde durch $\varepsilon \mathfrak{D}$ (wirkt auf σ -Variable) und die Zustandsänderung durch $-i\varepsilon \mathcal{H}$ (wirkt auf q -Variable) beschrieben. Dann gilt

$$\varepsilon \mathfrak{D} |\sigma, q\rangle = -i\varepsilon \mathcal{H} |\sigma, q\rangle \qquad \varepsilon \text{ infinitesimal} \tag{2.71}$$

Für Hyperflächen t = const. reduziert sich (2.71) auf die normale Schrödingergleichung

$$\mathfrak{D} \to \frac{d}{dt} \; ; \quad \mathcal{H} \to H$$

Für abgeschlossene Systeme hängt dann H nicht von t ab. Im

allgemeinen Fall wird $\mathcal{H}$ jedoch auch von der Definition von σ abhängen, da relativistisch die geometrische Beschreibung von σ mit der dynamischen Entwicklung verknüpft ist. $\mathcal{H}$ wird daher ein Funktional der σ -Variablen sein. (Für Gravitationsfelder würden auch die σ -Variablen zu q -Variablen. Wir setzen aber ausdrücklich eine flache "Vierer"-Metrik voraus). Nach Dirac parametrisieren wir nun σ durch innere Koordinaten $u_i(x^\mu)$

$$x^\mu = x^\mu(u_i, \tau) \qquad i = 1,2,3 \tag{2.72}$$

so daß für alle Werte der "Zeit" τ der Raum x^μ durch eine Schar von Hyperflächen $\sigma(\tau)$ abgedeckt wird. Man kann dann infinitesimale Variationen der Hyperfläche σ durch Variation von (2.72) charakterisieren

$$\delta x^\mu(u_i) = \varepsilon \left[\frac{\partial x^\mu}{\partial u_i} a_i(u) + n^\mu(u)\, a_\tau(u) \right] \tag{2.73}$$

wobei δx^μ in einen Anteil in Richtung der Normalen $n^\mu(u)$ sowie einen Anteil zerlegt wurde, welcher eine innere Änderung der Koordinaten beschreibt (ohne Änderung der Gestalt von σ). Eine beliebige Variation (2.71) kann dann durch Überlagerung von (2.73) beschrieben werden.

$$\varepsilon \mathcal{D} |\sigma, q\rangle = \varepsilon \int du' \left\{ a_i(u') \Pi^i(u') + a_\tau(u') \Pi^\tau(u') \right\} |\sigma(u), q\rangle \tag{2.74}$$

Die $\Pi^\alpha(u)$ sind die erzeugenden Operatoren für die infinitesimalen lokalen Variationen (d.h. sie werden im wesentlichen funktionale Ableitungen $\frac{\delta}{\delta x^\mu(u)}$ etc. sein). Betrachtet man die "Flächen-Geometrie" und deren Metrik $\gamma^{rs}(u)$

$$ds^2 = \gamma^{rs}(u)\, du_r du_s = \frac{\partial x^\mu}{\partial u_r} \cdot \frac{\partial x^\mu}{\partial u_s} du_r du_s \tag{2.75}$$

so läßt sich durch genaue Analyse der Transformationen (2.73) zeigen, daß die geometrischen "Operatoren" Π^α (keine Operatoren im Zustands-Raum; vergleiche dazu auch Schwinger's Methode der "Extended Operators" /3,4/) Bedingungen genügen müssen.

$$\begin{aligned} \left[\Pi^i(u), \Pi^k(u') \right] &= - \left\{ \Pi^i(u') \partial^k \delta^3(u-u') + \Pi^k(u) \partial^i \delta^3(u-u') \right\} \\ \left[\Pi^i(u), \Pi^\tau(u') \right] &= - \Pi^\tau(u) \partial^i \delta^3(u-u') \end{aligned} \tag{2.76}$$

$$\left[\pi^{\tau}(u),\, \pi^{\tau}(u')\right] = -\left\{\gamma_{ik}(u)\pi^{i}(u) + \gamma_{ik}(u')\,\pi^{k}(u')\right\}\partial\dot{\delta}^{3}(u-u')$$

Der geometrischen Darstellung von $\mathfrak{D}$ muß eine ebensolche lineare Darstellung von $\mathcal{H}$ entsprechen.

$$\mathcal{H} = \int d^{3}u \left\{a_i(u)\,T^{i}(u) + a_\tau(u)\,T^{\tau}(u)\right\} \tag{2.77}$$

Für beliebige Transformationen a_i, a_τ folgen dann die verallgemeinerten lokalen "Schrödingergleichungen"

$$\left(\pi^{\alpha}(u) + i\,T^{\alpha}(u)\right)|\sigma, q\rangle = 0 \qquad \alpha = i, \tau \tag{2.78}$$

sowie die Integrabilitätsbedingungen

$$\left[\left(\pi^{\alpha}(u) + i\,T^{\alpha}(u)\right),\left(\pi^{\beta}(u') + iT^{\beta}(u')\right)\right]|\sigma, q\rangle = 0 \tag{2.79}$$

deren Lösung die allgemeine Operator-Beziehung ist

$$\left[\left(\pi^{\alpha} + iT^{\alpha}\right),\left(\pi^{\beta\prime} + iT^{\beta\prime}\right)\right] = g^{\alpha\beta}{}_{\gamma}(u,u')\left(\pi^{\gamma\prime} + iT^{\gamma\prime}\right) \tag{2.80}$$

Man kann dann zeigen, daß die $g^{\alpha\beta}{}_{\gamma}(u,u')$ dieselbe Struktur besitzen wie die rechten Seiten in (2.76), woraus dann für die Operatoren $T^{\alpha}(u')$ folgende Kommutator-Relationen entstehen.

$$\begin{aligned}
i\left[T^{i}(u), T^{k}(u')\right] &= T^{i}(u')\partial^{k}\delta(u-u') + T^{k}(u)\partial^{i}\delta(u-u') + \\
&\quad + \left[\pi^{i}(u), T^{k}(u')\right] - \left[\pi^{k}(u'), T^{i}(u)\right] \\
i\left[T^{i}(u), T^{\tau}(u')\right] &= T^{\tau}(u)\partial^{i}\delta(u-u') + \left[\pi^{i}, T^{\tau\prime}\right] - \left[\pi^{\tau\prime}, T^{i}\right] \\
i\left[T^{\tau}(u), T^{\tau}(u')\right] &= \left\{\gamma_{ik}(u)T^{i} + \gamma_{ik}T^{i}(u')\right\}\partial^{k}\delta(u-u') + \left[\pi^{\tau}, T^{\tau\prime}\right] - \left[\pi^{\tau\prime}, T^{\tau}\right]
\end{aligned} \tag{2.81}$$

Die Terme $\sim[\pi, T]$ können nicht vollständig verschwinden, sondern beschreiben vielmehr die explizite Abhängigkeit des Operators $T^{\alpha}(u)$ von den σ-Variablen. Die Forderung für abgeschlossene Systeme lautet jetzt $\frac{\partial T^{\alpha}}{\partial \tau(x)} = 0$, d.h. $T^{\alpha}(u)$ hängt gewissermaßen nicht von der "lokalen Zeit" $\tau(x)$ ab, eine Forderung, welche durch die obige Ableitung automatisch erfüllt wird.

Wir kehren nun zur Nomenklatur des E!T! zurück und können die Relationen (2.81) als Kommutatorbedingungen an die Komponenten von $T_{\mu\nu}$ interpretieren, wobei $T_{0\mu}(x)$ dabei $T_{\alpha}(u)$ entspricht.

spricht. Interessanterweise erhalten wir keine Aussage über die $T_{ik}(x)$, d.h. die vierdimensionalen Tensoreigenschaften sind durch (2.81) überhaupt nicht definiert. Dirac schließt daraus, daß $T_\alpha(u)$ nicht notwendig zu einem "Vierer"-Tensor ergänzt werden muß /12/.

Im Gegensatz zu den bisherigen Aspekten stehen daher auch Ableitungen, die manifest vierdimensional kovariant sind /2,4, 20,24,45,80/ und auch Aussagen über $T^{ik}(x)$ machen. Wir entnehmen dieser Literatur folgende Relationen

$$
\begin{aligned}
&[T_{00}(x), T_{00}(y)] = -i\,(T_{0k}(x) + T_{0k}(y))\,\partial^k \delta(\vec{x}-\vec{y}) \\
&[T_{00}(x), T_{0e}(y)] = -i\,(T_{ke}(x) - T_{00}(y)\,g_{ke})\,\partial^k \delta(\vec{x}-\vec{y}) + \dots \\
&[T_{00}(x), T_{ke}(y)] = i\,(-\partial^0 T_{ke}(x) + T_{0k}(y)\,\vec{\partial}_e(x) + T_{0e}(y)\,\vec{\partial}_k(x))\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) + \dots \\
&[T_{0k}(x), T_{0e}(y)] = i\,(T_{0e}(x)\,\vec{\partial}_k(x) + T_{0k}(y)\,\vec{\partial}_e(x))\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) + \dots \\
&[T_{0k}(x), T_{me}(y)] = i\,(T_{me}(x) g_{kj} - T_{mj}(y)\,g_{ke} - T_{ej}(y)\,g_{mk})\,\partial^k \delta(\vec{x}-\vec{y}) + \dots
\end{aligned}
\tag{2.82}
$$

Die Punkte deuten höhere Ableitungen an (sogenannte "Schwinger-Terme"), über die mit kanonischen Methoden nichts ausgesagt werden kann (siehe auch Einleitung zu Kapitel III).

Wir leiten nun in Analogie zu den Bedingungen (2.3 ff) allgemeine Bedingungen für den Kommutator $[T_{\mu\nu}, T_{\rho\sigma}]$ ab und machen folgenden Ansatz

$$
\begin{aligned}
[T_{\mu\nu}(x), T_{\rho\sigma}(y)]_{x=y} = -i\,\{ &\alpha_{\mu\nu,\rho\sigma}(x)\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) + \beta^{k}_{\mu\nu,\rho\sigma}(y)\,\partial_k \delta(\vec{x}-\vec{y}) + \\
&+ \gamma^{ke}_{\mu\nu,\rho\sigma}(y)\,\partial_k \partial_e \delta(\vec{x}-\vec{y}) + \dots\dots \}
\end{aligned}
\tag{2.83}
$$

Die Koeffizienten α, β, γ sind durch Poincaré-Bedingungen und durch Symmetrieeigenschaften weiter festgelegt. Wichtig ist, daß im Gegensatz zu dem einfacheren Fall $[T_{0\mu}, \Phi]$ die Koeffizienten hier immer mit allen höheren verknüpft sind. Wir können diese Bedingungen an die α, β, γ nur festlegen, indem wir eine definierte Aussage über die Existenz von "Schwinger-Termen" machen. Man sieht leicht, daß kanonisch keine höheren als zweite Ableitungen der δ-Funktion auftreten können, solange $T_{\mu\nu}$ nur

erste Ableitungen der Felder enthält. Da wir uns vorerst nur für kanonische Resultata interessieren, nehmen wir daher an, daß nur die Koeffizienten α, β, γ nicht verschwinden. Aus der Umkehrung von (2.83) $[T_{\rho\sigma}(x), T_{\mu\nu}(y)]$ erhält man dann durch Koeffizientenvergleich die Beziehungen (A4)

$$\text{(i)} \quad \alpha_{\rho\sigma,\mu\nu} + \alpha_{\mu\nu,\rho\sigma} = -\partial_k \beta^k_{\mu\nu,\rho\sigma}$$

(2.84) $$\text{(ii)} \quad \partial_\varepsilon \gamma^{k\ell}_{\mu\nu,\rho\sigma} = \tfrac{1}{2}\left(\beta^k_{\rho\sigma,\mu\nu} - \beta^k_{\mu\nu,\rho\sigma}\right)$$

$$\text{(iii)} \quad \gamma^{k\ell}_{\mu\nu,\rho\sigma} = -\gamma^{k\ell}_{\rho\sigma,\mu\nu} \; ; \quad \partial_k \partial_\varepsilon \gamma^{k\ell}_{\mu\nu,\rho\sigma} = 0$$

Für die einzelnen Komponenten folgt aus Poincaré-Invarianz

$$\alpha_{0\nu,\rho\sigma} = \partial_\nu T_{\rho\sigma}$$

(2.85) $$\beta^k_{00,\rho\sigma} = (\Sigma^2_{ok})^{\rho\sigma,\lambda\tau} T_{\lambda\tau} = \left\{ g_{o\rho} T^k_\sigma - g^k_\rho T_{o\sigma} + g_{o\sigma} T_\rho{}^k - g^k_\sigma T_{\rho o} \right\}$$

sowie für den antisymmetrischen Anteil von $\beta^k_{oi,\rho\sigma}$

(2.86) $$\beta^k_{oi,\rho\sigma} - \beta^i_{ok,\rho\sigma} = (\Sigma^2_{ik})_{\rho\sigma,}{}^{\lambda\tau} T_{\lambda\tau}$$

Zusätzliche Bedingungen der Skalen- bzw. Konform-Invarianz (siehe (2.8 ff) würden ergeben

$$\beta_0{}^k{}_{k,\rho\sigma} = -d_T T_{\rho\sigma} \; ; \; d_T = 4$$

(2.87) $$\gamma^{k\ell}_{o\ell,\rho\sigma} = -\gamma^{\ell k}_{o\ell,\rho\sigma} = 0 \quad (\gamma^{k\ell}_{\dots} = \gamma^{\ell k}_{\dots})$$

Aus (2.84) und (2.85) lassen sich für einzelne Werte der Indizes bemerkenswerte Schlüsse ziehen. So folgt für $\rho = \mu = 0$

(2.88) $$\alpha_{o\sigma,o\nu} + \alpha_{o\nu,o\sigma} = \partial_\sigma T_{o\nu} + \partial_\nu T_{o\sigma}$$

Für $\beta^k_{o\mu,\rho\sigma}$ gilt andrerseits der allgemeine Ansatz

(2.89) $$\beta^k_{o\mu,\rho\sigma} = \tfrac{1}{2}(1+g_{\mu o})\left((\Sigma^2_{\mu k})_{\rho\sigma,}{}^{\lambda\tau} T_{\lambda\tau} + g_\mu{}^i B_{ik,\rho\sigma}\right)$$

wobei für Poincaré-Invarianz dann $B_{ik} = B_{ki}$ gelten muß. Damit

muß dann nach (2.84 i) gelten

$$\partial_\nu T_{o\sigma} + \partial_\sigma T_{o\nu} = -\tfrac{1}{2}(1+g_{\nu o})\left\{(\Sigma^2_{\nu k})_{o\sigma}{}^{\lambda\tau}\,\partial^k T_{\lambda\tau} + g_\nu{}^i\,\partial^k B_{ik,o\sigma}\right\} \tag{2.90}$$

Für $\nu = o$ fällt B_{ik} weg und wir erhalten die Konsistenzbedingung

$$\begin{aligned}\partial_o T_{o\sigma} + \partial_\sigma T_{oo} &= -\partial^k\{T_{k\sigma} + g_{\sigma o}T_{ok} - g_{\sigma k}T_{oo}\}\\ &= -\partial^k T_{k\sigma} - g_{\sigma o}\partial^k T_{ok} + g_{\sigma}{}^k\partial_k T_{oo}\\ \partial^\mu T_{\mu\sigma} &= -g_{\sigma o}\partial_o T_{oo} - g_{\sigma o}\partial^k T_{ok} = -g_{\sigma o}\partial^\mu T_{o\mu} = 0\end{aligned} \tag{2.91}$$

Das heißt, daß für einen symmetrischen Tensor $T_{\rho\sigma}$, der die Poincaré-Generatoren erzeugen soll und sich als Tensorfeld transformiert, notwendig der Erhaltungssatz folgt (sonst wäre der Ansatz einfach nicht konsistent; für den Zusammenhang zwischen allgemeinen Tensorfeldern und dem E.T. siehe auch /49/). Für die übrigen Indizes können wir (2.90) als Bedingung an die $B_{ik,o\sigma}$ formulieren, Für $\nu = i$ folgt nämlich

$$\partial_i T_{o\sigma} + \partial_\sigma T_{oi} = -\tfrac{1}{2}(\Sigma^2_{ik})_{o\sigma}{}^{\lambda\tau}\,\partial^k T_{\lambda\tau} - \tfrac{1}{2}\,\partial^k B_{ik,o\sigma}$$

oder ausgewertet

$$\partial^k B_{ik,o\sigma} = -\left\{2(\partial_i T_{o\sigma} + \partial_\sigma T_{oi}) + (g_{i\sigma}g_k{}^\tau - g_i{}^\tau g_{k\sigma})\partial^k T_{o\tau}\right\} \tag{2.92}$$

Für diese Indizes sieht dann die Bedingung an die γ-Koeffizienten so aus

$$\begin{aligned}\partial_\varrho \gamma^{k\ell}_{o\nu,o\sigma} &= \tfrac{1}{2}\left(\beta^k_{o\sigma,o\nu} - \beta^k_{o\nu,o\sigma}\right)\\ &= \tfrac{1}{4}\Big\{(1+g_{so})\left((\Sigma^2_{\sigma k})_{o\nu}{}^{\lambda\tau}T_{\lambda\tau} + g_\sigma{}^i B_{ik,o\nu}\right) -\\ &\quad -(1+g_{\nu o})\left((\Sigma^2_{\nu k})^{\lambda\tau}_{o\sigma}T_{\lambda\tau} + g_\nu{}^i B_{ik,o\sigma}\right)\Big\}\\ &= \tfrac{1}{4}\left(g_\sigma{}^i B_{ik,o\nu} - g_\nu{}^i B_{ik,o\sigma}\right) +\\ &\quad + \tfrac{1}{4}\Big\{(1+g_{so})\left[g_{\sigma o}g_k{}^\lambda g_\nu{}^\tau + (g_{\sigma\nu}g_k{}^\tau - g_\sigma{}^\tau g_{k\nu})g^{\lambda}{}_o\right] -\\ &\quad -(1+g_{\nu o})\left[g_{\nu o}g_k{}^\lambda g_\sigma{}^\tau + (g_{\sigma\nu}g_k{}^\tau - g_\nu{}^\tau g_{k\sigma})g^{\lambda}{}_o\right]\Big\}T_{\lambda\tau}\end{aligned} \tag{2.93}$$

Im einzelnen folgt daraus

$$\partial_\varepsilon \gamma^{k\ell}_{00,00} = 0$$

$$\partial_\varepsilon \gamma^{k\ell}_{0i,00} = -\tfrac{1}{4} B_{ik,00} + \tfrac{1}{4}\{2T^k{}_i - 2g^k{}_i T_{00}\} \tag{2.94}$$

$$\partial_\varepsilon \gamma^{k\ell}_{0i,0m} = -\tfrac{1}{4}\{B_{mk,0i} - B_{i\ell,0m}\} + \tfrac{1}{4}\{-g_{i\ell}T_{0m} + g_{mk}T_{0i}\}$$

Man sieht, daß die $B_{ik,\rho\sigma}$ sehr weitgehend festgelegt sind, wenn keine zweiten Ableitungen der δ -Funktion vorkommen ($\gamma = 0$).

Wir überprüfen nun diese Bedingungen an den Kommutatoren (2.82). Dazu nehmen wir folgende Umformungen vor. Mit Hilfe der Relation

$$a(x)\,\partial_\varepsilon \delta(\vec{x}-\vec{y}) = -\partial_\varepsilon a(x)\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) + a(y)\,\partial_\varepsilon \delta(\vec{x}-\vec{y}) \tag{2.95}$$

finden wir

$$i\left[T_{00}(x), T_{00}(y)\right] = -\partial^k T_{0k}(x)\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) + 2T_{0k}(y)\,\partial^k \delta(\vec{x}-\vec{y})$$

$$i\left[T_{00}(x), T_{0\ell}(y)\right] = -\partial^k T_{\ell k}(x)\delta(\vec{x}-\vec{y}) + (T_{k\ell}(y) - g_{k\ell}T_{00}(y))\partial^k \delta(\vec{x}-\vec{y}) \tag{2.96}$$

$$i\left[T_{00}(x), T_{k\ell}(y)\right] = \partial^0 T_{k\ell}(x)\delta(\vec{x}-\vec{y}) - \left(T_{0\ell}(y)g_{\ell j} + T_{0\ell}(y)g_{kj}\right)\partial^k \delta(\vec{x}-\vec{y})$$

und damit explizit

$$i\left[T_{00}(x), T_{\rho\sigma}(y)\right] = \partial^0 T_{\rho\sigma}(x)\delta(\vec{x}-\vec{y}) + \{g_{0\rho}T_{k\sigma}(y) - g_{k\rho}T_{0\sigma}(y) - g_{k\sigma}T_{0\rho}(y) + g_{0\sigma}T_{\rho k}(y)\}\,\partial^k \delta(\vec{x}-\vec{y}) \tag{2.97}$$

wenn der Erhaltungssatz gilt $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$. Damit folgt dann das kanonische Resultat

$$\left[T_{00}(x), T_{\rho\sigma}(y)\right] = -i\{\partial^0 T_{\rho\sigma}(x)\delta(\vec{x}-\vec{y}) + (\Sigma^2_{0k})_{\rho\sigma}\,\partial^\tau T_{k\tau}(y)\,\partial^k \delta(\vec{x}-\vec{y})\} \tag{2.98}$$

Für die Kommutatoren mit $T_{0i}(x)$ zerlegen wir die Terme $\sim \partial^k \delta(\vec{x}-\vec{y})$

$$\left[T_{0i}(x), T_{\rho\sigma}(y)\right] = -i\partial_i T_{\rho\sigma}\delta(\vec{x}-\vec{y}) - \tfrac{i}{2}\left((\Sigma^2_{ik}T)_{\rho\sigma} + B_{ik,\rho\sigma}(y)\right)\partial^k \delta(\vec{x}-\vec{y}) \tag{2.99}$$

indem wir den zu erwartenden Spin-Anteil aus den rechten Seiten

von (2.82 b) entsprechend (2.89) herausgezogen haben. Für die $B_{ik,\rho\sigma}(y)$ finden wir durch Vergleich (A4)

$$B_{ik,00} = 2(T_{ik} - g_{ik} T_{00})$$

$$B_{ik,0l} = -(2g_{ik} T_{0l} + g_{kl} T_{0i} + g_{il} T_{0k}) \tag{2.100}$$

$$B_{ik,ml} = -2g_{ik} T_{ml} + T_{mk} g_{il} + T_{mi} g_{kl} + T_{kl} g_{mi} + T_{il} g_{km}$$

und weiter, daß $B_{ik,\rho\sigma}$ alle Bedingungen (2.92 ff) für $\gamma_{\dots} = 0$ erfüllt. Außerdem gilt

$$B_{ik,\rho\sigma} = B_{ki,\rho\sigma} \tag{2.101}$$

so daß $(\Sigma^2_{ik})_{\rho\sigma,}{}^{\lambda\tau} T_{\lambda\tau}$ bereits den ganzen antisymmetrischen Anteil darstellt. Für Skalen- bzw. Konform-Invarianz müßte dann gelten

$$B^k{}_{k,\rho\sigma} = -2 d_T T_{\rho\sigma} \tag{2.102}$$

Wir erhalten jedoch für verschiedene Komponenten von $T_{\rho\sigma}$ verschiedene Ergebnisse

$$B^k{}_{k,00} = 2(T^k{}_k - 3T_{00}) = -2(4T_{00} - T^\mu{}_\mu)$$

$$B^k{}_{k,0l} = -(6T_{0l} + 2T_{0l}) = -2 \cdot 4 T_{0l} \tag{2.103}$$

$$B^k{}_{k,ml} = -8T_{ml} + 4T_{ml} = -2T_{ml}$$

Überraschenderweise ergibt sich also für die reinen Raum-Komponenten T_{ik} eine andere kanonische Dimension ($d_{T_{ik}} = 2$) als für die T_{00}, T_{0l} Komponenten ($d_T = 4$). Außerdem besitzt T_{00} nur dann ein definiertes Verhalten unter Skalentransformationen, wenn die Spur $T^\mu{}_\mu$ verschwindet. $T^\mu{}_\mu = 0$ ist gerade notwendig für den Erhaltungssatz des "Dilatationsstromes" (2.8). Daher ist es für Skalentransformationen nicht mehr möglich, für die gleichzeitigen Generatorrelationen mit $T_{\rho\sigma}(y)$ ein kanonisches Ergebnis zu erhalten. Der merkwürdige Sachverhalt, daß die räumlichen Komponenten eines kovarianten Stromes eine andere kanonische Dimension als die zeitliche Komponente besitzen,

wurde im Rahmen der "Strom-Algebra" bereits an anderer Stelle diskutiert /30,31/. Wir stellen hier nur fest, daß $T_{0\mu}(x)$ für sich wohl eindeutig definiert ist, daß jedoch die kovariante Formulierung, die notwendig Komponenten T_{ik} erfordert, möglicherweise auf prinzipielle Schwierigkeiten stößt. Das wirft erneut die Diskussion um den Dirac-schen Ansatz (2.81) auf, der auch kovariant ist, aber ohne Tensoreigenschaften auskommt. Diese Fragen konnten bis jetzt noch nicht befriedigend geklärt werden, zumal die Ableitung von Bedingungen der Art (2.81) mit denselben Methoden im Fall der Eichtheorien (also mit Nebenbedingungen an die kanonischen Variablen) auf Schwierigkeiten stößt (der entscheidende, dann fragliche Schritt ist der Übergang von (2.79) zur reinen Operatorbedingung (2.80)). Wir beschränken uns daher im folgenden darauf, die bisherigen Resultate explizit im Fall der Quantenelektrodynamik zu untersuchen.

Die Rechnungen dazu sind im einzelnen sehr langwierig, können aber mit den kanonischen Methoden, die wir zu Beginn des Kapitels bei den Generator-Relationen für die Felder benützten, ebenfalls bewältigt werden. Wir geben deshalb nur die Resultate an (Erläuterungen in (A3, A5, A6)).
Für den Kommutator $[T_{00}, T_{00}']$ ist es auf Grund der speziellen Symmetrie günstiger, ihn direkt zu berechnen

$$[T_{00}(x), T_{00}(y)] = \tfrac{1}{2}\left([T_{00}(x), T_{00}(y)] - [T_{00}(y), T_{00}(x)]\right)$$

so daß man symmetrische Terme in (x - y) von vorneherein weglassen kann. Damit findet man die Dirac-Schwinger-Bedingung explizit erfüllt, wobei alle nichtlokalen Terme herausfallen und keine singulären "Coulomb-Terme" übrigbleiben (A3) (was wiederum als Bestätigung für die Operatorordnung im Wechselwirkungsterm dient).Für die allgemeinen Relationen $[T_{\mu\nu}, T_{\lambda\tau}]$ verschafft man sich am besten zuerst die Kommutatoren mit Ableitungen des Dirac-Feldes $[T_{\mu\nu}, \partial^{\lambda}\psi]$ etc. und entwickelt dann $T_{\lambda\tau}(y)$. Man findet folgende Beziehungen

$$[T_{0\mu}(x), \partial^\lambda \psi(y)] = -i\partial_\mu \partial^\lambda \psi\, \delta(\vec{x}-\vec{y}) - \tfrac{i}{2}(1+g_{\mu 0})\left[(\Sigma^{3/2}_{\mu k})^{\lambda\tau}\partial_\tau \psi(y) + \right.$$

(2.1o4)

$$\left. + g_\mu{}^i\, b^\lambda{}_{ik}(y)\right]\partial^k \delta(\vec{x}-\vec{y}) + c_\mu^{ke}{}_{,\lambda}(y)\,\partial_k\partial_e\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) + E_\mu{}^\lambda(x,y)$$

mit der Spin-Matrix für Spinor-Vektor-Felder

$$(\Sigma^{3/2}_{\mu\nu})^{\lambda\tau} = \tfrac{1}{4}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]g^{\lambda\tau} + (g_\mu{}^\lambda g_\nu{}^\tau - g_\mu{}^\tau g_\nu{}^\lambda) \qquad (2.1o5)$$

und nicht-lokalen Eichtermen $E_\mu{}^\lambda(x,y)$. Für die Koeffizienten b^λ, c^λ finden wir

$$b_{ik}{}^\lambda(y) = \left[g^{\lambda 0}\gamma^0(\gamma_i g^\tau{}_k + \gamma_k g^\tau{}_i) - g_{ik}g^{\lambda\tau} - (g^\lambda{}_k g^\tau{}_i + g^\lambda{}_i g^\tau{}_k)\right]\partial_\tau\psi(y)$$

$$c_o^{ke}{}_{,\lambda}(y) = \tfrac{i}{2}\left[g^{\lambda 0}g^{ke} + g^{\lambda e}\gamma^k\gamma^0\right]\psi(y) \qquad (2.1o6)$$

$$c_i^{ke}{}_{,\lambda}(y) = \tfrac{i}{4}\left[g^{\lambda 0}\gamma^0(\gamma^k g_i{}^e + \gamma_i g^{ke}) - g^{\lambda e}(g_i{}^k + \gamma^k\gamma_i)\right]\psi(y)$$

Die Eichterme lassen sich testen, indem man zeigt, daß man sie im Rahmen der Poincaré-Algebra auf dieselbe Eichfunktion $\Lambda_k(x)$ aus (2.65) beziehen kann. Es gilt nämlich

$$[M_{\mu\nu}, \partial^\lambda\psi] = i[P^\lambda, [M_{\mu\nu},\psi]] - i[[P^\lambda, M_{\mu 0}],\psi]$$

$$= i[P^\lambda,[M_{\mu\nu},\psi]] - i[(-g_\mu{}^\lambda P_\nu + g_\nu{}^\lambda P_\mu),\psi] \qquad (2.1o7)$$

$$= -i(y_\mu\vec{\partial}_\nu - y_\nu\vec{\partial}_\mu + \Sigma^{1/2}_{\mu\nu})\partial^\lambda\psi - i(g_\mu{}^\lambda g_\nu{}^\tau - g_\nu{}^\lambda g_\mu{}^\tau)\partial_\tau\psi$$

$$+ \tfrac{e}{2}(g_{\mu 0}g_\nu{}^k - g_{\nu 0}g_\mu{}^k)\, i[P^\lambda,\{\psi(y),\Lambda_k(y)\}]$$

Man findet, daß die Integration des explizit berechneten Eichtermes $E_\mu{}^\lambda(x,y)$ tatsächlich der letzten Zeile von (2.1o7) entspricht.

Damit kennen wir alle Kommutatoren, die bei der Ausführung von $[T_{\mu\nu}, T_{\lambda\tau}]$ notwendig sind. Wir betrachten zuerst den Maxwell-Anteil $[T_{\mu\nu}, T^M_{\lambda\tau}]$ für sich, da die Kommutatoren für die Feldstärken nach (2.57) nicht mit den übrigen Feldern mischen, so daß die Kommutatoren unabhängig von der Wechselwirkung entwickelt werden können. Man erhält folgende Ergebnisse (A6)

$$[T_{oo}(x), T^{M}_{oe}] = -i\partial^{o} T^{M}_{oe}\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) - i\left(-T^{M}_{oo}(y)\,g_{ej} + T_{ej}(y)\right)\partial^{\vec{x}}\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

(2.1o8)
$$[T_{oo}(x), T^{M}_{ke}(y)] = -i\partial^{o} T^{M}_{ke}(x)\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) + i\left(T^{M}_{oe}(y)\,g_{kj} + T^{M}_{ok}\,g_{ej}\right)\partial^{\vec{x}}\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

$$[T_{ok}(x), T^{M}_{oe}(y)] = -i\,\partial_{k}\,T^{M}_{oe}\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) + i\left(T^{M}_{oe}(y)\,g_{kj} + T^{M}_{ok}\,g_{ej}\right)\partial^{\vec{x}}\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

Diese stimmen mit den Relationen (2.96) ff. überein und führen daher auf Poincaré-Invarianz. Für den Kommutator $[T_{ok}, T_{me}]$ erhalten wir jedoch ein anderes Ergebnis.

(2.1o9)
$$[T_{ok}, T^{M}_{me}] = -i\partial_{k} T^{M}_{me}\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) - \tfrac{i}{2}\left((\Sigma^{2}_{kj})_{me}{}^{\lambda\tau}\,T_{\lambda\tau} + B^{M}_{kj,me}\right)\partial^{\vec{x}}\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

Diesmal hat $B^{M}_{kj,ml}$ die gewünschte Eigenschaft bei Skalen-Transformationen

(2.11o)
$$B^{M}{}^{k}_{,me} = -8\,T^{M}_{me} = -2d_{T_{me}}\,T^{M}_{me}\;;\; d_{T_{me}} = 4$$

im Gegensatz zu Relation (2.1o3). Dafür läßt sich $B^{M}_{kj,ml}$ allerdings nicht mehr vollständig durch $T^{M}_{\lambda\tau}$ ausdrücken.

Die Rechnung für Dirac- und Wechselwirkungs-Anteil ist wegen der nichtlokalen Eich-Beiträge sehr viel komplizierter (A5). Außerdem treten wegen (2.1o6) auch zweite Ableitungen der δ-Funktion auf, so daß die Konsistenzbedingungen weniger trivial als für T^{M} sind. Für die lokalen Anteile folgt mit den Kommutatoren $[T_{o\mu}, \partial^{\lambda}\psi]$ etc. wieder eine allgemeine Struktur nach (2.89) ff. Für den symmetrischen Anteil des Koeffizienten $\beta_{...}$ nach (2.89) folgt explizit

$$B^{D}_{ik,\lambda\tau} = -\left[2g_{\lambda k}T^{D}_{\lambda\tau} + (g^{\sigma}{}_{i}(g_{\tau k}g_{\lambda\rho} + g_{\lambda k}g_{\tau\rho}) + i\leftrightarrow k)\,T^{D}_{\rho\sigma}\right] +$$

(2.111)
$$+ 2g_{\lambda o}g_{\tau o}T^{D}_{ik} + (g_{\lambda}{}^{\ell}g_{\tau o} + g_{\tau}{}^{\ell}g_{\lambda o})\,\tfrac{i}{4}\left[\bar{\psi}, \{\gamma_{i}\overrightarrow{\partial_{o}}g_{ke} + \right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{2}\left(\gamma_{i}\gamma^{o}\gamma_{e}\overleftarrow{\partial_{k}} + \overrightarrow{\partial_{k}}\gamma_{e}\gamma^{o}\gamma_{i}\right) + i\leftrightarrow k\}\psi\right] + \tfrac{i}{8}g_{\lambda}{}^{\ell}g_{\tau}{}^{m}\left[\bar{\psi}, \{\gamma_{i}(\overrightarrow{\partial_{e}}g_{km} + \overrightarrow{\partial_{m}}g_{ke}) + \right.$$
$$\left. + i\leftrightarrow k\}\psi\right]$$

so daß sich ähnlich wie beim Maxwell-Anteil nicht mehr alle Terme durch $T^{D}_{\rho\sigma}$ ausdrücken lassen. Vom Wechselwirkungsanteil kommen ebenfalls noch Beiträge dazu.

$$B^{W}_{ik,\lambda\tau} = -\tfrac{1}{4}(1+g_{\lambda 0})\{(g_{\tau i}A_k + g_{\tau k}A_i), j^0\} - \tag{2.112}$$
$$-\tfrac{1}{4}(1+g_{\tau 0})\{(g_{\lambda i}A_k + g_{\lambda k}A_i), j^0\}$$

Für Terme mit zweiter Ableitung der δ -Funktion erhalten wir nur vom Dirac-Anteil

$$\gamma^{k\ell}_{0\mu,\lambda\tau} = \frac{i}{8}\Big\{\Big[g_{\mu 0}g_\tau{}^\ell\varepsilon_0{}^k{}_{\lambda\sigma} - \tfrac{1}{2}g_\mu{}^i(g_{\tau 0}\varepsilon_{oj\lambda\sigma}(g_i{}^\ell g^{jk} + \tag{2.113}$$
$$+ g_i{}^j g^{k\ell}) + g_\tau{}^\ell\varepsilon_i{}^k{}_{\lambda\sigma})\Big] + [k \leftrightarrow \ell]\Big\} j_5^\sigma$$

wobei wir alle Kombinationen der γ -Matrizen durch j_5^σ ausdrücken konnten. Im einzelnen folgt z.B.

$$\gamma^{k\ell}_{00,00} = 0 = \gamma^{k\ell}_{oi,00}$$
$$\gamma^{k\ell}_{oi,om} = \{\tfrac{1}{2}g_m{}^\ell\varepsilon_i{}^k{}_{o\sigma} + \tfrac{1}{2}g_m{}^k\varepsilon_i{}^\ell{}_{o\sigma}\}\, j_5^\sigma \tag{2.114}$$

Für diese Indizes hatten wir gerade die Bedingung (2.94) abgeleitet. Wir erhalten daher die Gleichung

$$\tfrac{1}{4}B_{ik,00} = \tfrac{1}{4}\{2T_{ik} - 2g_{ik}T_{00}\} \tag{2.115}$$

welche durch (2.111) erfüllt ist, da $B^{W}_{ik,00} = 0$ gilt. Die weitere Bedingung

$$\partial_k\gamma^{k\ell}_{oi,om} = -\tfrac{1}{4}\{B_{mk,oi} - B_{ik,om}\} + \tfrac{1}{4}\{-g_{ik}T_{om} + g_{mk}T_{oi}\} \tag{2.116}$$

welche $\gamma^{k\ell}_{\dots}$ nicht-trivial mit den B_{ik} verknüpft, ist nicht mehr erfüllt. Wir erhalten nämlich

$$B_{mk,oi} - B_{ik,om} = g_{mk}T_{oi} - (2g_{ik}T_{om} + T_{ok}g_{mi}) -$$
$$-\tfrac{1}{4}\{(g_{mk}A_i - g_{ik}A_m), j^0\} + \Big\{\tfrac{i}{4}[\bar\psi, (\gamma_i\overleftrightarrow{\partial_0}g_{km} - \gamma_m\overleftrightarrow{\partial_0}g_{ik})\psi] \tag{2.117}$$
$$-\tfrac{i}{8}\partial_k[\bar\psi, (\gamma_i\gamma^0\gamma_m - \gamma_m\gamma^0\gamma_i)\psi] + (i \leftrightarrow k)\Big\}$$

Dagegen finden wir für $\partial_k \gamma^{k\ell}_{\dots}$

$$\partial_\ell \gamma^{k\ell}_{0i,0m} = \frac{1}{2}\{g_m{}^\ell \varepsilon_i{}^k{}_{0\sigma} + g_m{}^k \varepsilon_i{}^\ell{}_{0\sigma}\}\partial_\ell j_5^\sigma \tag{2.118}$$

$$= \frac{i}{8}\partial_\ell\left[\bar\Psi,\left(g_m{}^\ell\{\gamma^0,[\gamma_i,\gamma^k]\} + g_m{}^k\{\gamma^0,[\gamma_i,\gamma^\ell]\}\right)\Psi\right]$$

Daher müßte gelten

$$-\frac{1}{16}\partial_\ell\left[\bar\Psi,\left(g_m{}^\ell\{\gamma^0,[\gamma_i,\gamma^k]\}+g_m{}^k\{\gamma^0,[\gamma_i,\gamma^\ell]\}\right)\Psi\right] =$$

$$= (g_{ik}T_{0m}+T_{0k}g_{im}) - \frac{1}{4}\{(g_{km}A_i - g_{ik}A_m), j^0\} - \tag{2.119}$$

$$-\frac{i}{4}\left(\left[\bar\Psi,(\gamma_i\overleftrightarrow{\partial}_0 g_{km} - \gamma_m\overleftrightarrow{\partial}_0 g_{ik})\Psi\right] + \frac{1}{4}\partial_k\left[\bar\Psi,(\{\gamma^0,[\gamma_i,\gamma_m]\}+ i\leftrightarrow k)\Psi\right]\right)$$

Diese Gleichung ist jedoch sowohl in den Dirac-Termen als auch dem Wechselwirkungs-Anteil verletzt. Wir stellen daher fest, daß die allgemeinen Bedingungen der Symmetrie und der Poincaré-Invarianz (sowie der Konformen Invarianz) in den expliziten Kommutatoren der QED nicht mehr erfüllt sind.

Hinzu kommt noch, daß in den nichtlokalen Anteilen singuläre "Coulomb-Terme" übrigbleiben.

$$C(x;y) = -\frac{ie^2}{2}\delta^3(0)\Big\{g_{\mu 0}\Big[(g_\tau{}^\ell g_{\lambda 0}+g_{\tau 0}g_\lambda{}^\ell)\cdot\Big(\partial^k\partial_\ell D(\vec x-\vec y)\cdot\partial_k D(\vec x-\vec y) +$$

$$+\partial_\ell D(\vec x-\vec y)\,\delta(\vec x-\vec y) - D(0)\,\partial_\ell D(\vec x-\vec y)\Big)\Big] + 2 g_\mu{}^i g_{\lambda 0} g_{\tau 0}\,\partial_i D(\vec x-\vec y)\,\delta(\vec x-\vec y)\Big\} \tag{2.120}$$

Ähnlichen Ausdrücken waren wir schon bei den Erhaltungssätzen begegnet. Bei den Generator-Relationen der Felder fielen diese Terme nach geeigneter Operatorordnung heraus. In den Relationen $[T_{\mu\nu},T_{\rho\sigma}]$ lassen sie sich jedoch nicht mehr vermeiden. $[T_{00},T_{\lambda\tau}]$ sowie $[T_{0\mu},T_{ik}]$ enthalten keine solchen singulären Beiträge. Wir können noch einen Vergleich mit dem Erhaltungssatz durchführen, indem wir integrieren und die Indizes geeignet summieren. Wir vergleichen (ohne Quellen)

$$\partial^\mu T_{\mu\tau} = -2e^2 g_{\tau k}\,\delta^3(0)\,\partial^k D(0) \tag{2.121}$$

mit der Bewegungsgleichung $\partial^\nu T_{\mu\tau} = i\int d^3x\,[T_{0\nu}(x), T_{\mu\tau}(y)]$
und finden wieder aus (2.12o) den Ausdruck

$$(2{,}122)\quad \int C^\nu{}_{\mu\tau}(x|y)\,d^3x = -e^2\delta^3(0)\,g_{\tau k}\partial^k\vartheta(0)$$

Der Faktor 2 fehlt, weil wir während der Rechnung zu (2.12o) bereits einen Term $\sim\partial^k\vartheta(0)$ aus Symmetriegründen weggelassen haben. Der Beitrag (2.122) entstand jedoch erst nach Integration, so daß wir hier einen guten Hinweis für die richtige Behandlung der "Coulomb-Terme" gefunden haben.

Zusammenfassend stellen wir fest, daß die Generator-Relationen mit $T_{\mu\nu}$ nur für die Felder, nicht jedoch für die verallgemeinerten Dirac-Schwinger-Kommutatoren konsistent sind mit den allgemeinen Symmetrieeigenschaften bzw. der Poincaré-Invarianz. Möglicherweise ist man bereits bei diesen kanonischen Ansätzen gezwungen, auch höhere "Schwinger-Terme" mit einzubeziehen. Dies erfordert jedoch eine Analyse des Problems, die weit über die hier gefundenen Ansätze hinausgreift.

Kapitel III Nichtkanonische Methoden

Wir wenden uns nun Methoden zu, welche über die kanonischen Verfahren hinausgehen. Für Lösungen einer Quantenfeldtheorie sind die maßgebenden Größen die zeitgeordneten n-Punkt Funktionen der fundamentalen Felder bzw. deren Vakuumserwartungswerte. Für eine Theorie mit Wechselwirkung genügen diese einem unendlichen, gekoppelten Gleichungssystem, welches bisher im wesentlichen nur im Rahmen einer renormierten Störungstheorie entwickelt werden konnte. In Matrixelementen, die Produkte von lokalen Operatoren am selben Raum-Zeit-Punkt enthalten, treten im allgemeinen Divergenzen auf. In einer renormierbaren Theorie kann dann dieser endliche, wohldefinierte Satz von typischen Divergenzen durch Renormierung der konstanten Parameter der Theorie beseitigt werden. Es ist jedoch unabhängig vom physikalischen Konzept der Renormierung nicht bekannt, ob diese Divergenzen eine mathematische Folge der Störungstheorie sind oder auch in einer exakten Lösung auftreten. Neben den lokalen Feldern, die in den Feldgleichungen auftreten, sind auch andere lokale Operatoren von Bedeutung, welche Operatorprodukte enthalten. So zum Beispiel Energie- und Impulsdichte, welche nach dem kanonischen Verfahren im wesentlichen bilineare Produkte der Felder am selben Ort sind. Wegen der Divergenzen der Theorie können jedoch Inkonsistenzen mit kanonischen Resultaten auftreten (/5,6,17,18,34,35,44, 53-57,66-74/, zur Einführung /61,62,64/).

Wir werden uns im folgenden vor allem mit der Methode des sogenannten "point-splitting" in Anwendung auf den E.T. auseinandersetzen. In der QED und allgemeiner in "Eichtheorien" treten hierbei besondere Probleme auf. Diese konnten in der QED für den Operator des elektromagnetischen Stromes erfolgreich gelöst werden /6,7,8/. In Analogie dazu betrachten wir die verallg. "Ward-Identitäten" des E.T. im Rahmen der Störungstheorie für einfache Loop-Graphen. Da "point-splitting" auch als Operatormethode sinnvoll ist, können wir jeweils auch eine Operatordefinition der eichinvariant regularisierten Identitäten

geben, welche interessante Zusammenhänge mit kanonischen Relationen aufdeckt. Weiter zeigt eine genaue Untersuchung der divergenten Anteile in der Störungsentwicklung, daß der Erhaltungssatz für den Dirac-Anteil des E.T. eine "Anomalie" aufweist, in enger Analogie zur sogenannten "Adler-Anomalie" im Fall des Pseudo-Vektorstromes /66,67,69/, so daß die entsprechende formale "Ward-Identität" in Störungstheorie nicht erfüllt ist. Wir wenden uns daher der formalen Struktur dieser Ward-Identitäten zu.

III 1. Verallgemeinerte "Ward-Identitäten" des Energie-Impuls-Tensors

Für die Ableitung gehen wir aus vom erzeugenden Funktional der Greenfunktionen der QED /1,8,13,14,15,16/

$$S[\mathcal{A}^\lambda, J^\lambda, q, \bar{q}] = {}_w\langle 0|T \exp\{i\int d^4y\, \mathcal{L}_Q(y)\}|0\rangle_w \tag{3.1}$$

mit einem Anteil $\mathcal{L}_Q(x)$, der keine Ableitungskopplungen enthält

$$\mathcal{L}_Q(x) = \bar{\psi} q + \bar{q}\psi + j_\mu \mathcal{A}^\mu + A_\mu J^\mu \tag{3.2}$$

wobei $q, \bar{q}, J^\lambda, \mathcal{A}^\lambda$ frei variierbare c-Zahl-Funktionen darstellen ($q, \bar{q}$ antikommutierende Spinorquellen!). Die formale Lösung ist dann (siehe z.B. Fried /77/)

$$S = e^{-i\frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_\mu}\cdot\frac{\delta}{\delta J^\mu}} \left\{ e^{-\frac{i}{2} J\cdot D_F \cdot J}\, e^{-i\bar{q}\cdot G[\mathcal{A}]\cdot q}\, e^{-F[\mathcal{A}]} \right\} \tag{3.3}$$

Dabei ist $G = G(x,y|\mathcal{A})$ die Fermion-Greenfunktion in Anwesenheit eines äußeren Vektor-Potentials $\mathcal{A}_\mu(x)$ und

$$F[\mathcal{A}] = Sp\, ln\,(G[\mathcal{A}]\cdot S^{-1}) \tag{3.4}$$

die formale Fredholm-Determinante mit der freien Greenfunktion

$S = G[o]$. $F[A]$ ist singulär und muß erst im Rahmen des Regularisierungsverfahrens definiert werden. Eichinvarianz läßt sich dann folgendermaßen definieren

$$\partial^{r(x)} \langle 0 | j_\mu(x) | 0 \rangle_A = \partial^{r(x)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta A^{r(x)}} F[A] = 0 \tag{3.5}$$
$$q = \bar{q} = J = 0 ;$$

mit der Identität

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta A^{r(x)}} S[\dots] = \frac{\delta}{\delta \phi_\alpha} \gamma_\mu \frac{\delta}{\delta \phi_\alpha(x)} S[\dots] \tag{3.6}$$

Analog folgt für Kovarianz der Theorie gegenüber Raum-Zeit-Transformationen für den VEW des E.T.

$$\partial^r \langle 0 | T_{\mu\nu}(x) | 0 \rangle_{Q=0} = 0$$
$$\langle 0 | T_{\mu\nu}(x) | 0 \rangle_{Q=0} = \langle 0 | T_{\nu\mu}(x) | 0 \rangle_{Q=0} \tag{3.7}$$

Die allgemeinen Ward-Identitäten für beliebige Greenfunktionen erhält man am einfachsten, indem man die Operatoridentitäten zunächst für nichtverschwindende Quellen ableitet. Durch weitere funktionale Ableitungen des VEW dieser Identitäten erhält man dann kompliziertere Matrixelemente. Aus den Ergebnissen von Kapitel I können wir folgende Beziehungen entnehmen

$$T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu} = (A_\nu J_\mu - A_\mu J_\nu) - (A_\nu j_\mu - A_\mu j_\nu) + \tfrac{1}{4} (\bar{q} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \psi - \bar{\psi} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] q \tag{3.8}$$

$$\partial^r T_{\mu\nu} = - \partial_\nu J_\lambda A^\lambda - \partial_\nu A^\lambda j_\lambda - (\partial_\nu \bar{q} \psi + \bar{\psi} \partial_\nu q) \tag{3.9}$$

$$T^r{}_\mu = \tfrac{w}{2} [\bar{\psi}, \psi] - 3 J_\mu A^r - A^r j_\mu - \tfrac{5}{2} (\bar{\psi} q + \bar{q} \psi) - \varepsilon^2 \mathfrak{D}(0) \delta^3(0) \tag{3.10}$$

Wir berechnen zuerst den VEW ${}_{w,Q}\langle 0 | T_{\mu\nu}(x) | 0 \rangle_{w,Q}$ in funktionaler Formulierung, indem wir $\psi, \partial_\nu \psi, \bar{\psi}$ etc. durch die entsprechenden

Ableitungen von S nach den Quellen ausdrücken. Nach (A7) gilt

$$
\begin{aligned}
{}_{w,a}\langle 0|T_{\mu\nu}(x)|0\rangle_{w,a} = e^{-i\frac{\delta}{\delta A}\cdot\frac{\delta}{\delta J}} \Big\{ & \mathrm{Sp}\Big[\tfrac{1}{2}\gamma_\mu\big(\vec{\partial}_\nu G(xx|A) + G(xx|A)\overleftarrow{\partial}_\nu\big)\Big] + \\
& + i(\bar{q}\cdot G)\,\gamma_\mu\overrightarrow{\partial}_\nu (G\cdot q)(x) + \tfrac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\rho(x)\Big(-i\,\mathrm{Sp}\big[\gamma^5\gamma^\sigma G(xx|A)\big] + (\bar{q}\cdot G)\gamma^5\gamma^\sigma(G\cdot q)\Big) \\
& - g_{\mu\nu}\Big[-4i\delta^4(0) + ie\,\mathrm{Sp}\big[\gamma_\lambda G(xx|A)\big](D_R\cdot J)^\lambda(x) - \tfrac{1}{2}\big(\bar{q}(x)(G\cdot q)(x) + (\bar{q}\cdot G)(x)\,q(x)\big) \\
& - e(\bar{q}\cdot G)(x)(D_R\cdot J)^\lambda(x)\gamma_\lambda(G\cdot q)(x)\Big] + \tfrac{1}{4}g_{\mu\nu}\big(\partial_\lambda(D_R\cdot J)_\tau - \partial_\tau(D_R\cdot J)_\lambda\big)^2 \\
& - \Big[\big(\partial_\mu(D_R\cdot J)_\lambda - \partial_\lambda(D_R\cdot J)_\mu\big)\partial_\nu(D_R\cdot J)^\lambda + \partial^\lambda\Big(\big(\partial_\mu(D_R\cdot J)_\lambda - \partial_\lambda(D_R\cdot J)_\mu\big)(D_R\cdot J)_\nu\Big)\Big] \\
& + g_{\mu\nu}(D_R\cdot J)^\lambda\cdot J_\lambda + i\Big[\big(\partial_\nu\partial_\mu + \tfrac{1}{4}g_{\mu\nu}\Box\big)D_R^{\lambda}{}_\lambda(0) - \\
& - \big(g_{\mu\tau}\partial_\nu\partial_\lambda - \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial_\lambda\partial_\tau\big)D_R^{\lambda\tau}(0)\Big]\Big\}\, e^{-i\bar{q}\cdot G\cdot q}\, e^{-F[A]}\, e^{-\frac{i}{2}J\cdot D_R\cdot J}
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Es treten verschiedene singuläre Terme auf, sowohl im Dirac- als auch im Maxwell-Anteil. Dabei ist auf die Argumente bei Ableitung besonders zu achten, etwa bei $\vec{\partial}_\nu G(xx|A)$ bzw. $G(xx|A)\overleftarrow{\partial}_\nu$. Um diese definieren zu können, muß bereits formales "point-splitting" durchgeführt werden. (Auf die genauen Konsequenzen werden wir später eingehen).
Wir können nun unsere "Ward-Identitäten" prüfen, indem wir die entsprechenden Schritte auf der rechten Seite von (3.11) durchführen (unter Benützung der Feldgleichungen für die Greenfunktionen) und mit den VEW der rechten Seite von (3.8), (3.9), (3.10) vergleichen. Für diese erhält man (A7.5), (A7.6), (A7.7)

$$
\begin{aligned}
\langle T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}\rangle = e^{-i\frac{\delta}{\delta A}\cdot\frac{\delta}{\delta J}} \Big\{ & \tfrac{1}{4}\Big(-\bar{q}\,[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\,(G\cdot q) + (\bar{q}\cdot G)\,[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\,q\Big) + \\
& + \Big(-J_\mu(D_R\cdot J)_\nu - A_\nu\big(ie\,\mathrm{Sp}[\gamma_\mu G(xx|A)] - e(\bar{q}\cdot G)\gamma_\mu(G\cdot q)\big)\Big) - (\mu \rightleftharpoons \nu)\Big\}
\end{aligned}
$$

$$\langle \partial^\mu T_{\mu\nu} \rangle = e^{-i\frac{\delta}{\delta A}\frac{\delta}{\delta J}} \Big\{ \partial_\nu \Big[-(D_R\cdot J)^\lambda \big(ie\,Sp[\gamma_\lambda G(xx|A)] - e(\bar q\cdot G)\gamma_\lambda (G\cdot q)\big)$$
$$- \partial_\nu A^\lambda \big(ie\,Sp[\gamma_\lambda G(xx|A)] - e(q\cdot G)\gamma_\lambda (G\cdot q)\big)$$
$$+ \partial_\nu J^\lambda (D_R\cdot J)_\lambda + \partial_\nu \bar q (G\cdot q) + (\bar q\cdot G)\partial_\nu q \Big\} e^{-i\dots}$$

(3.12)
$$\langle T^\mu_\mu(x) \rangle = e^{-i\frac{\delta}{\delta A}\cdot\frac{\delta}{\delta J}} \Big\{ -i\,Sp\big[(e\not A + m)G(xx|A)\big] + (\bar q\cdot G)(e\not A + m)(G\cdot q)$$
$$+ 3(D_R\cdot J)^\lambda J_\lambda + \tfrac{5}{2}\big((\bar q\cdot G)q + \bar q(G\cdot q)\big) +$$
$$+ 4\big(-ie\,Sp[\gamma_\lambda G] + e(\bar q\cdot G)\gamma_\lambda (G\cdot q)\big)(D_R\cdot J)^\lambda - e^2 \mathfrak{D}(0)\delta^3(0) \Big\} e^{-i\dots}$$

Wir vergleichen nun (12) mit dem Ergebnis für die Ward-Identitäten und finden im einzelnen

1. Erhaltungssatz ist erfüllt bis auf Anteile, die die Coulomb-Funktion $\mathfrak{D}(x-y)$ (welche in $D_R(x-y)$ vorkommt) mit $\partial^\mu J_\mu$ gekoppelt enthalten.
   Für Stromerhaltung $\partial^\mu J_\mu(x) = 0$ verschwinden diese zwar in der Vakuum-Amplitude, können jedoch für höhere Ableitung nach J einen Beitrag liefern.
2. Symmetrie Identität ebenfalls bis auf Terme $\sim (\mathfrak{D}\cdot\partial J)$ erfüllt, wenn man noch die sing. Terme

$$i\big(\partial_\mu \partial_\lambda D_{R\nu}^{\ \lambda}(0) - \partial_\nu \partial_\lambda D_{R\mu}^{\ \lambda}(0)\big) - i\big(n_\nu \partial_\mu - n_\mu \partial_\nu\big)(n\partial)\mathfrak{D}(0)$$

   wegläßt, was aus Symmetriegründen plausibel ist (für $n^\mu = (1,\vec 0)$ folgt nämlich $(g_{\mu 0}g_{\nu i} - g_{\nu 0}g_{\mu i})\partial^i \mathfrak{D}(\vec\varepsilon)\delta^1(\varepsilon^0) \to 0$ für $\varepsilon^\mu \to 0$).
3. Die Spur-Identität ist außer durch Coulomb Terme $\sim (\mathfrak{D}\cdot\partial J)$ jedoch noch durch zusätzliche divergente Anteile verletzt

$$g^{\mu\nu}\langle T_{\mu\nu}|0\rangle = \langle T^\mu_\mu\rangle + e^{-i\dots}\Big\{ 24i\delta^4(0) + 4i(n\partial)^2\mathfrak{D}(0) +$$
$$+ (\partial_\mu - n_\mu(n\partial))(\mathfrak{D}\cdot\partial J)\cdot(D_R\cdot J)^\mu \Big\} e^{-i\dots}$$

   die sowohl vom Dirac- als auch Photon-Anteil herrühren.

Die bisherige Rechnung ist insofern formal, als die divergenten Terme nicht eichinvariant regularisiert wurden. Im Dirac-Teil des E.T. kamen z.B. Ableitungen $\partial_\nu G(xx|A)$ entsprechend dem Operator $\bar\psi \gamma_\mu \overleftrightarrow{\partial_\nu} \psi$ vor. Interessant ist, daß wir bei diesen Ausdrücken die Ableitungen von $G(xx|A)$ gar nicht anders als durch "point-splitting" sinnvoll definieren können, da linkes bzw. rechtes Argument x in der Funktion $G(xx|A) = G(x)$ gar nicht mehr unterscheidbar sind. Damit kommen wir direkt zu den Operator-Methoden des nächsten Abschnittes.

III 2. Eichinvariante Regularisierung des Operator-Produktes

Wir benötigen eine Regularisierung der Greenfunktion $G(xy|A)$ für $x \sim y$. Daher genügt uns vorerst eine reine Dirac-Theorie in Anwesenheit des äußeren Vektor-Potentials. Wir können dann in Analogie zum Fall des elektromagnetischen Stromes folgendermaßen vorgehen. Im Dirac-Anteil in $T_{\mu\nu}(x)$

$$T^D_{\mu\nu}(x) = \tfrac{i}{2}\left[\bar\psi, \gamma_\mu \overleftrightarrow{\partial_\nu}\psi\right] + \tfrac{i}{32}\partial^2\left[\bar\psi(x), \{\gamma_\lambda, [\gamma_\mu,\gamma_\nu]\}\psi(x)\right] \tag{3.13}$$

können wir den Symmetrisierungsterm mit Hilfe der Formel

$$\{\gamma_\rho, [\gamma_\mu,\gamma_\nu]\} = -4i\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^5\gamma^\sigma$$

durch den γ^5-Strom ausdrücken (siehe auch Kibble /21/)

$$j^{5\sigma}(x) = \tfrac{1}{2}\left[\bar\psi(x), \gamma^5\gamma^\sigma\psi(x)\right]$$

$$T^D_{\mu\nu}(x) = \tfrac{i}{2}\left[\bar\psi\gamma_\mu \overleftrightarrow{\partial_\nu}\psi\right] + \tfrac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\rho j^{5\sigma}(x) \tag{3.14}$$

Zur Regularisierung definieren wir nun den nichtlokalen Grenzübergang

$$T^D_{\mu\nu}(x;\varepsilon) = \tfrac{i}{4}\left[\bar\psi(x+), \left(\gamma_\mu \overleftarrow{\partial_\nu}(x+) + \gamma_\mu \overrightarrow{\partial_\nu}(x-)\right)\psi(x-)\right] + \tfrac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\rho(x) j^{5\sigma}(x;\varepsilon) \tag{3.15}$$

mit den "point-splitting" Argumenten

$$x^\mu_\pm = x^\mu \pm \varepsilon^\mu \; ; \quad j^\sigma_5(x;\varepsilon) = \tfrac{1}{2}\left[\bar\psi(x_+), \gamma_5 \gamma^\sigma \psi(x_-)\right]$$

Die bisherigen Ausdrücke sind jedoch nicht mehr invariant gegenüber Eichtransformation 2. Art

$$\psi(x) \to \psi(x) e^{-ie\lambda(x)} \; ; \quad \bar\psi(x) \to \bar\psi(x) e^{ie\lambda(x)}$$

Bekanntlich /5,8,15/ kann dieser Mangel im Fall des elektromagnetischen Stromes durch Einführung eines zusätzlichen Phasenfaktors, der nichtlokal im elektromagnetischen Potential ist, behoben werden

$$\tilde j_\mu(x;\varepsilon) = -\frac{e}{2}\left[\bar\psi(x_+), \gamma_\mu \psi(x_-)\right] \phi(x_+, x_-) \quad \text{analog} \quad \tilde j^\sigma_5(x;\varepsilon) \tag{3.16}$$

mit dem Exponenten (das Linienintegral ist über einen geraden Weg definiert)

$$\phi(x_+, x_-) = \exp\left\{-ie \int_{x_-}^{x_+} d\xi^\sigma A_\sigma(\xi)\right\} \tag{3.17}$$

wobei sich A_σ entsprechend inhomogen transformiert

$$A_\sigma(\xi) \to A_\sigma(\xi) + \partial_\sigma \lambda(\xi)$$

Mit Hilfe der Relation

$$\left[\bar\psi(x_+), \gamma_\mu \overleftrightarrow{\partial_\nu} \psi(x_-)\right] = -\tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon^\nu}\left[\bar\psi(x_+), \gamma_\mu \psi(x_-)\right] \tag{3.18}$$

läßt sich nun die entsprechende Änderung für $T_{\mu\nu}(x;\varepsilon)$ ganz analog zu $j_\mu(x;\varepsilon)$ durchführen, wobei wegen der Ableitungen keine rein multiplikative Korrektur mehr möglich ist. Wir schreiben zunächst um

$$T^D_{\mu\nu}(x;\varepsilon) = \frac{i}{2e} \frac{\partial}{\partial \varepsilon^\nu} j_\mu(x;\varepsilon) + \tfrac{1}{4} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\rho j^\sigma_5(x;\varepsilon) \tag{3.19}$$

Wir finden dann eine einfache eichinvariante Definition, indem

wir denselben Phasenfaktor $\Phi(x_+,x_-)$ hier mit unter die Ableitungen setzen

$$\tilde{T}^{D}_{\mu\nu}(x;\varepsilon) = \frac{i}{2e}\,\partial_\nu(\varepsilon)\,\tilde{j}_\mu(x;\varepsilon) + \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\partial^{\rho}(x)\,\tilde{j}^{\sigma}_{5}(x;\varepsilon) \tag{3.20}$$

Neben dem multiplikativen Faktor Φ erhalten wir daher folgende additive Beiträge durch Ausführung der Differentiationen

$$\tilde{T}^{D}_{\mu\nu}(x;\varepsilon) = T^{D}_{\mu\nu}(x;\varepsilon)\,\Phi(x_+,x_-) + E_{\mu\nu}(x;\varepsilon)$$

$$E_{\mu\nu}(x;\varepsilon) = \tfrac{1}{2}\,\tilde{j}_\mu(x;\varepsilon)\,\partial_\nu(\varepsilon)\int_{x_-}^{x_+} d\xi^{\sigma} A_\sigma(\xi) - \frac{ie}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\tilde{j}^{\sigma}_{5}(x;\varepsilon)\,\partial^{\rho}(x)\int_{x_-}^{x_+} d\xi^{\sigma} A_\sigma(\xi) \tag{3.21}$$

Interessanterweise erhalten wir für $\varepsilon \to 0$ formal einen endlichen Term

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E_{\mu\nu}(x;\varepsilon) = j_\mu(x)\,A_\nu(x)$$

von der Ableitung nach ε^{ν}. Eichinvarianz erzwingt daher einen zusätzlichen Wechselwirkungsterm zum Dirac-Anteil. Das zeigt einen Zusammenhang mit dem kanonischen Ergebnis des ersten Kapitels auf. Dort war nämlich der Maxwell-Anteil für sich nur eichinvariant (und symmetrisch), wenn man die Feldgleichungen einsetzte, was genau einen Term $j_\mu A_\nu$ erzeugte,

$$T^{M}_{\mu\nu} = \tfrac{1}{4}g_{\mu\nu}F^2 - F_{\mu\lambda}\partial_\nu A^\lambda + \partial^\lambda(F_{\mu\lambda}A_\nu) = \tfrac{1}{4}g_{\mu\nu}F^2 + F_{\mu\lambda}F^\lambda{}_\nu + j_\mu A_\nu$$

Hätten wir für den Maxwell-Anteil $T^{M}_{\mu\nu}$ direkt den üblichen eichinvarianten, symmetrischen Tensor gewählt, so würde der gesamte E.T. daher ohne "point-splitting" nicht vollständig symmetrisch sein. (Der entsprechende Teil bei der Symmetrisierung des Dirac-Anteils ist ja $\frac{1}{2}(j_\nu A_\mu - j_\mu A_\nu)$).

Wir untersuchen nun analog wie bei $T_{\mu\nu}(x)$ die formalen Operatoreigenschaften von $\tilde{T}_{\mu\nu}(x;\varepsilon)$. Für den Erhaltungssatz finden wir

$$\partial^\mu \tilde{T}_{\mu\nu}(x;\varepsilon) = \frac{i}{2e}\,\partial_\nu(\varepsilon)\left(\partial^\mu(x)\,\tilde{j}_\mu(x;\varepsilon)\right) \tag{3.22}$$

und nach Einsetzen der Feldgleichungen (die Rechnung ist identisch mit dem Erhaltungssatz beim elektromagnetischen Strom; siehe A8)

$$\partial^\mu \tilde{T}_{\mu\nu}(x;\varepsilon) = -\tfrac{1}{2}\partial_\nu(\varepsilon)\left\{\tilde{j}_\mu(x;\varepsilon)\int_{x_-}^{x_+} d\xi^\sigma F_\sigma{}^\mu(\xi)\right\} \tag{3.23}$$

wobei sich die verschiedenen Beiträge zu dem explizit eichinvarianten Linienintegral zusammenfügen.

Wir stellen fest, daß sich auch hier wieder in nullter Ordnung in ε^μ eine Korrektur zur kanonischen Rechnung ergibt. Dort galt nämlich

$$\partial^\mu T^{D}_{\mu\nu}(x) \overset{kan.}{=} -j_\mu(x)\,\partial_\nu A^\mu(x)$$

Dieses Ergebnis wird wieder automatisch in ein eichinvariantes transformiert

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\partial^\mu \tilde{T}_{\mu\nu}(x;\varepsilon) = -j_\mu(x)\,F_\nu{}^\mu(x) \tag{3.24}$$

und korrespondiert auch genau zum eichinvarianten, symmetrischen Maxwell E.T., für den gilt

$$\partial^\mu\left(\tfrac{1}{4}g_{\mu\nu}F^2 + F_{\mu\lambda}F^\lambda{}_\nu\right) = -j_\mu F^\mu{}_\nu \tag{3.25}$$

so daß der gesamte Tensor erhalten bleibt. (Das kanonische Ergebnis

$$\partial^\mu T^{M}_{\mu\nu}(x) \overset{kan.}{=} -\partial_\nu j_\mu A^\mu$$

wäre nicht eichinvariant).

Für die Symmetrie-Relation finden wir (A8)

$$\tilde{T}^{D}_{\mu\nu} - \tilde{T}^{D}_{\nu\mu} = \tfrac{ie}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\tilde{j}^\sigma_5\int_{x_-}^{x_+} d\xi^\sigma F_\sigma{}^\rho(\xi) + \\ + \tfrac{1}{2}\left(\tilde{j}_\mu g_{\nu\rho} - \tilde{j}_\nu g_{\mu\rho}\right)\left(\partial^\rho(\varepsilon)\int_{x_-}^{x_+} d\xi^\sigma A_\sigma(\xi) - \left(A^\rho(x_+) + A^\rho(x_-)\right)\right)$$

und durch Entwickeln des Linien-Integrals im zweiten Teil

$$\tilde{T}^{D}_{\mu\nu} - \tilde{T}^{D}_{\nu\mu} = \frac{ie}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\tilde{j}^{\sigma}_{5}(x;\varepsilon)\int_{x_-}^{x_+} d\xi^{\sigma} F^{\sigma\rho}(\xi) + \\ + (\tilde{j}_{\mu} g_{\nu\rho} - \tilde{j}_{\nu} g_{\mu\rho})\,\varepsilon^{\sigma}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(2n+1)!}(\varepsilon^{\alpha}\partial_{x})^{2n-1} F^{\rho\sigma}(x) \tag{3.26}$$

als wiederum explizit eichinvariantes Ergebnis. Das heißt in nullter Ordnung in ε^{μ} muß $\tilde{T}^{D}_{\mu\nu}$ natürlich bereits symmetrisch sein, da der eichinvariante Maxwell-Tensor ja bereits symmetrisch ist.
Wir fügen hier noch das analoge Resultat für die Spurbildung an (A8)

$$\tilde{T}^{\mu}{}_{\mu}(x;\varepsilon) = \frac{m}{2}\left[\bar{\psi}(x_+),\psi(x_-)\right]\phi(x_+,x_-) + \tilde{j}_{\mu}(x;\varepsilon)\,\varepsilon^{\sigma}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(2n+1)!}(\varepsilon\partial(x))^{2n-1} F^{\mu\sigma}(x) \tag{3.27}$$

Der kanonische Term $-j_{\mu}A^{\mu}$ in nullter Ordnung in ε^{μ} fehlt ebenfalls wieder, weil die Spur des symmetrischen Maxwell-Tensors identisch verschwindet.

Wir fassen die Ergebnisse dieser Operator-Rechnungen zusammen. Wie wir feststellten, gelingt es, eine eichinvariante Form $\tilde{T}^{D}_{\mu\nu}(x;\varepsilon)$ für den Dirac-Anteil des E.T. zu definieren, in enger Analogie zur nichtlokalen Definition des elektromagneitschen Stromes. Für den E.T. ändern sich dabei jedoch notwendig auch die kanonischen Anteile, die in "point-splitting" den nullten Gliedern einer Entwicklung nach ε^{μ} entsprechen. Symmetrierelation, Erhaltungssatz und Spureigenschaft des gesamten E.T. bleiben gültig, wenn man für den Maxwell-Anteil ebenfalls die nichtkanonische, explizit symmetrische Form wählt. (Nichtkanonisch deshalb, weil sich für lokale Kopplung an einen Strom $j_{\mu}A^{\mu}$ diese Form nicht aus dem Lagrange-Kalkül ableiten läßt).
Natürlich können solche nichtlokalen Methoden nicht direkt in das lokale Wirkungsprinzip eingebaut werden. Man ist aber auf Grund der vorliegenden Ergebnisse eher geneigt, an den kanonischen Verfahren zu zweifeln. Wir werden jedoch diese

Ergebnisse nur zur Berechnung regularisierter Amplituden verwenden. Der Vorteil ist gegenüber anderen Regularisierungsverfahren, daß wir bereits eine Interpretation der auftretenden Terme geben konnten, z.B. einen Anteil der Bauart $\tilde{j}_\mu A^\nu$ als vollständige Korrektur zum kanonischen Ergebnis (mit allen höheren Ordnungen in ε^ν, welche wieder notwendig sind für die Eichinvarianz von $\tilde{j}_\mu$). Dies wäre an der entsprechenden Integral-Version der gesamten Amplitude schwer zu erkennen, zumal ja $\langle \tilde{j}_\mu \rangle$ ein singulärer Beitrag ist. Diese Aufspaltung wird sich auch bei der Diskussion von Anomalien als sehr nützlich erweisen. Bevor wir im nächsten Abschnitt darauf näher eingehen, müssen wir jedoch noch das Verhalten von $\tilde{T}^D_{\mu\nu}$ unter Ladungskonjugation untersuchen. Für den Strom $\tilde{j}_\mu$ erhalten wir folgende Transformation

$$\mathcal{C}\,\tilde{j}_\mu(x;\varepsilon)\,\mathcal{C}^{-1} = -\tilde{j}_\mu(x;-\varepsilon)\;;\quad \mathcal{C}\,\tilde{j}^\sigma_5(x;\varepsilon)\,\mathcal{C}^{-1} = \tilde{j}^\sigma_5(x;-\varepsilon) \tag{3.28}$$

wobei sich der Eichfaktor folgendermaßen transformiert

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\,\phi(x_+,x_-)\,\mathcal{C}^{-1} &= \exp\Big\{-ie\int_{x_-}^{x_+} d\xi^\sigma\, \mathcal{C}A_\sigma(\xi)\mathcal{C}^{-1}\Big\}\\ &= \exp\Big\{ie\int_{x_-}^{x_+} d\xi^\sigma A_\sigma(\xi)\Big\}\\ &= \phi(x_-,x_+)\end{aligned} \tag{3.29}$$

Daher finden wir für $\tilde{T}^D_{\mu\nu}(x;\varepsilon)$ das symmetrische Transformationsverhalten

$$\mathcal{C}\,\tilde{T}^D_{\mu\nu}(x;\varepsilon)\,\mathcal{C}^{-1} = \tilde{T}^D_{\mu\nu}(x;-\varepsilon) \tag{3.30}$$

Wir folgern daraus, daß für Invarianz gegenüber Ladungskonjugation noch über das Vorzeichen von ε^μ gemittelt werden muß. Dies steht in voller Übereinstimmung damit, daß auch für Hermitezität von $\tilde{T}_{\mu\nu}$ eine solche Mittelung durchgeführt werden muß $\big(\tilde{T}^+_{\mu\nu}(x;\varepsilon) = \tilde{T}_{\mu\nu}(x;-\varepsilon)\big)$. Daher kann die Amplitude des

gemittelten Tensors

(3.31) $$\tfrac{1}{2}\left\langle \tilde{T}^{D}_{\mu\nu}(x;\varepsilon) + \tilde{T}^{D}_{\mu\nu}(x;-\varepsilon)\right\rangle$$

nur in gerader Ordnung von ε^r abhängen, abgesehen von logarithmischen Anteilen.
Unsere Konstruktion des eichinvarianten E.T. ist daher konsistent mit allen fundamentalen Forderungen an die QED.

III 3. Regularisierung des E.T. in Loop-Approximation

Wir wenden uns nun wieder den verallgemeinerten "Ward-Identitäten" zu und untersuchen mit Hilfe der Ergebnisse des Operator-point-splitting die Vakuum-Amplitude des Dirac-Anteils. Für die Regularisierung genügt es zunächst, die Theorie im äußeren Feld $A^r(x)$ zu betrachten. In Feynman-Graphen formuliert, bedeutet das eine Entwicklung der entsprechenden Greenfunktion nach einfachen Loops mit jeweils einem Vertex für $T^{D}_{\mu\nu}$. Wir betrachten zunächst wieder den analogen Fall der Vakuum-Amplitude des Stromes

(3.32) $$_A\langle 0|j_\mu(x)|0\rangle_A = ie\,Sp[\gamma_\mu G(xx|A)]$$

Die Einführung des zusätzlichen Eichfaktors bewirkt, daß diese Amplitude (Vakuumpolarisation) statt quadratisch nur mehr logarithmisch divergiert und explizit eichinvariant wird (Johnson /8/). Dabei gilt für die Greenfunktion G[A] die funktionale Entwicklung nach $A^r(x)$

(3.33) $$G[A] = S + e\,S\cdot\not{A}\cdot S + e^2 S\cdot\not{A}\cdot S\cdot\not{A}\cdot S + O(e^3)$$

mit dem freien Propagator

$$S(x-y) = -\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik(x-y)}\frac{m+\not{k}}{m^2-k^2-i0} := \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}S(k)\,e^{-ik(x-y)}$$

Die ersten Terme dieser Entwicklung divergieren für Koinzidenz der Argumente x,y, so daß von dem zusätzlichen Faktor $\phi(x_+,x_-)$ höhere Terme in ε^μ beitragen. Ähnliches erwarten wir auch für den Tensor $\tilde{T}^D_{\mu\nu}(x;\varepsilon)$. Invarianz gegenüber Ladungskonjugation erfordert, daß nur gerade Potenzen von A (x) in der Entwicklung von ${}_A\langle 0|\tilde{T}^D_{\mu\nu}(x;\varepsilon)|0\rangle_A$ auftreten. Wir können daher ansetzen

$$(3.34)\quad {}_A\langle 0|\tilde{T}^D_{\mu\nu}|0\rangle_A = Sp\Big[\Big(-\tfrac{1}{2}\gamma_\mu\partial_\nu(\varepsilon) - \tfrac{i}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\rho(\varepsilon)\gamma^5\gamma^\sigma\Big)\sum_{N=0,1,4..} e^N\,\tilde{\tilde{\Gamma}}_N(x_-,x_+)$$

$\tilde{\tilde{\Gamma}}_N$ setzt sich zusammen aus dem normalen Loop-Graphen ((N+1) Vertizes) sowie Eichtermen, die Kombinationen von einfacheren Loops mit entsprechenden Entwicklungstermen von $\phi(x_+,x_-)$ darstellen.

$$(3.35)\quad \tilde{\tilde{\Gamma}}_N(x_-,x_+) = \sum_{Perm}\sum_{\substack{n,m=0\\ n+m=N}}^{N} \Gamma^0_n(x_-,x_+)\,\frac{1}{m!}\Big[-i\int_{x_-}^{x_+} d\xi^\sigma A_\sigma(\xi)\Big]^m$$

wobei $\sum_{Perm}$ eine Summation aller Variablen zur Bose-Symmetrisierung bedeutet und Γ^0_n den normalen Loop-Graphen n-ter Ordnung bezeichnet.
Wir betrachten weiter bequemerweise die Fouriertransformierte von $\tilde{\tilde{\Gamma}}_N$

$$\Gamma^0_n(x_-,x_+) = \int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}e^{-ik_1x}A^{\sigma_1}(k_1)\cdots\int\frac{d^4k_n}{(2\pi)^4}e^{-ik_nx}A^{\sigma_n}(k_n)\,\Gamma^0_n\begin{pmatrix}k_1 & \cdots & k_n\\ \sigma_1 & \cdots & \sigma_n\end{pmatrix};\varepsilon\Big)$$

$$(3.36)\quad \Gamma^0_n\begin{pmatrix}k_1 & \cdots\\ \sigma_1 & \cdots\end{pmatrix};\varepsilon\Big) = Sp\Big[\Big(-\tfrac{1}{2}\gamma_\mu\partial_\nu(\varepsilon) + \tfrac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^5\gamma^\sigma(k_1+..+k_n)^\rho\Big)\times$$
$$\times\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{i\varepsilon(2k-k_1-\cdots-k_n)}S(k)\gamma^{\sigma_1}S(k-k_1)\gamma^{\sigma_2}\cdots\gamma^{\sigma_n}S(k-k_1-\cdots-k_n)\Big]$$

Für die Fouriertransformierte der Eichterme finden wir

$$(3.37)\quad -i\int_{x_-}^{x_+}d\xi^\sigma A_\sigma(\xi) = -2i\varepsilon^\sigma\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}A_\sigma(k)\,e^{-ikx}\,\frac{\sin(\varepsilon k)}{(\varepsilon k)}$$

die in entsprechender Potenz zu (35) bzw. als Polynom in $(k\varepsilon)$

zu $\Gamma_N\left(\begin{matrix}k_1\\ \sigma_1\end{matrix},\dots;\varepsilon\right)$ beitragen. Man erhält folgende Formel

$$\Gamma_N\left(\begin{matrix}k_1\\ \sigma_1\end{matrix}\dots,\varepsilon\right) = Sp\left[\left(-\tfrac{1}{2}\gamma_\mu \partial_\nu(\varepsilon)+\dots\right)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\sum_{Perm}\sum_{m=0}^{N}\frac{(-2i)^m}{m!}\times\right.$$

(3.38)

$$\left.\times E_m\left(\begin{matrix}k_{N-m+1} & \dots & k_N\\ \sigma_{N-m+1} & \dots & \sigma_N\end{matrix};\varepsilon\right)e^{i\varepsilon(2k-k_1-\dots-k_{N-m})}S(k)\gamma^{\sigma_1}\dots\gamma^{\sigma_{N-m}}S(k-k_1-\dots-k_{N-m})\right]$$

mit dem Eichfaktor

(3.39)

$$E_m\left(\begin{matrix}k_{N-m+1} & \dots & k_N\\ \sigma_{N-m+1} & \dots & \sigma_N\end{matrix};\varepsilon\right) = \varepsilon_{\sigma_{N-m+1}}\dots\varepsilon_{\sigma_N}\,\frac{\sin(\varepsilon k_{N-m+1})}{(\varepsilon k_{N-m+1})}\times\dots\times\frac{\sin(\varepsilon k_N)}{(\varepsilon k_N)}$$

Aus der Abschätzung des Divergenzgrades in

(3.40)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int d^4k\, e^{i(\varepsilon k)}S(k)\times\dots\times S(k-k_1-\dots-k_n)\sim O\left(\varepsilon^{n-4}\log\varepsilon\right)$$

folgt, bis zu welcher Ordnung wir die Terme E_m berücksichtigen müssen. Wegen der Ableitung $\partial_\nu(\varepsilon)$ müssen wir bei Multiplikation mit Termen der Ordnung $O\left((\varepsilon)^m\right)$ daher auch logarithmische Beiträge beachten.

Wir finden, daß für N = 6 die Amplitude sicher endlich ist und für den γ^5 Anteil bereits für N = 4. Wir diskutieren nun die einzelnen Beiträge. Dabei beachten wir vorerst eine mögliche Richtungsabhängigkeit beim Grenzübergang $\varepsilon\to 0$ nicht, sondern führen eine implizite kovariante Mittelung durch, indem wir wie üblich symmetrisch integrieren /61,69,75/.
Dies entspricht, wie wir später sehen werden, folgender Mittelungsprozedur

(3.41)

$$\langle\varepsilon^{\alpha_1}\dots\varepsilon^{\alpha_{2n}}\rangle = (\varepsilon^2)^n\,\frac{S^{\alpha_1\dots\alpha_{2n}}}{2^n(n+1)!}$$

wobei $S^{\alpha_1\dots\alpha_{2n}}$ der total symmetrische Einheitstensor 2n-ter Stufe ist, z.B.

$$\langle\varepsilon^{\alpha_1}\varepsilon^{\alpha_2}\varepsilon^{\alpha_3}\varepsilon^{\alpha_4}\rangle = \frac{(\varepsilon^2)^2}{24}\left(g^{\alpha_1\alpha_2}g^{\alpha_3\alpha_4}+g^{\alpha_1\alpha_3}g^{\alpha_2\alpha_4}+g^{\alpha_1\alpha_4}g^{\alpha_2\alpha_3}\right)$$

Für N = 0 trägt wegen $\mathrm{Sp}\left[\gamma^5\gamma^\sigma S(k)\right] = 0$ nur der kanonische Anteil bei, welcher wie ε^{-4} divergiert und bei symmetrischer Integration kovariant ist

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \langle 0|\tilde{T}_{\mu\nu}(x;\varepsilon)|0\rangle_{A=0} = i\, g_{\mu\nu}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{k^2}{m^2-k^2-i0} \tag{3.42}$$

Beim E.T. können wir jedoch die Vakuum-Amplitude nicht einfach zu Null machen, wie dies beim elektromagnetischen Strom die Invarianz des Vakuums gegen Ladungskonjugation erzwingt. Vielmehr gelten Eindeutigkeitsaussagen über die Poincaré-Generatoren wenn die Felder eindeutigen Gleichungen genügen (siehe /76/). Für Eichtheorien sind diese Probleme jedoch ungelöst. (Im Zusammenhang mit allgemeiner Relativität siehe z.B. /38,39/).

Wir nehmen im folgenden an, daß eine Vakuum-Subtraktion des freien Anteiles kovariant durchführbar ist.

Zur Diskussion der höheren Anteile N > 0 vertauscht man am besten den Grenzwert $\varepsilon^\mu \to 0$ mit der Integration $\int d^4k$. Damit lassen sich Potenzen von ε^μ unter dem Integral durch Ableitungen $\frac{\partial}{\partial k}$ ausdrücken und durch partielle Integration auf den Integranden überwälzen. Das bewirkt effektiv die Substitution

$$E_m(\ldots;\varepsilon) \longrightarrow E_m\left(\ldots;\tfrac{i}{2}\partial(k)\right) \tag{3.43}$$

(Diese Vertauschung der Grenzprozesse ist natürlich ein entscheidender Schritt, für dessen Gültigkeit ein Beweis nur schwer zu finden sein dürfte).

Für den kanonischen Anteil erhalten wir nach Ausführung der Ableitung $\partial_\nu(\varepsilon)$ in der Ordnung N = 2 folgenden Ausdruck (Bose-Symmetrisierung bereits durchgeführt)

$$\begin{aligned}\Gamma^2_{\mu\nu}\binom{k_1\ k_2}{\sigma_1\ \sigma_2};\varepsilon) = -i\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,e^{2i(\varepsilon k)}\,k_\nu\,\mathrm{Sp}\Big[\gamma_\mu\Big\{ S(k+\tfrac12(k_1+k_2))\times\\ \times\Big(\gamma^{\sigma_1}S(k+\tfrac12(k_2-k_1))\gamma^{\sigma_2}+\gamma^{\sigma_2}S(k+\tfrac12(k_1-k_2))\gamma^{\sigma_1}\Big)S(k-\tfrac12(k_1+k_2)\\ +\partial^{\sigma_2}(k)\Big[1+\tfrac{1}{24}(k_2\partial)^2\Big]S(k+\tfrac{k_2}{2})\gamma^{\sigma_1}S(k-\tfrac{k_1}{2})+\partial^{\sigma_1}\Big[1+\tfrac{1}{24}(k_1\partial)^2\Big]S(k+\tfrac{k_2}{2})\gamma^{\sigma_2}S(k-\\ +\partial^{\sigma_1}\partial^{\sigma_2}\Big[1+\tfrac{1}{24}\big((k_1\partial)^2+(k_2\partial)^2\big)\Big]S(k)\ +\ O(\partial^6)\,S(k)\Big\}\Big]\end{aligned} \tag{3.44}$$

Die höheren Ordnungen dieser Entwicklung

$$-i\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,e^{2i(\varepsilon k)}\,k_\nu\,Sp\left[\gamma_\mu\,O(\partial^6)\,S(k)\right]$$

sind konvergent und im Limes $\varepsilon^\kappa \to 0$ verschwindende Oberflächenterme, wobei wir wegen k_ν eine partielle Ableitung verlieren. Den expliziten Rechnungen von Anhang (A9) entnehmen wir folgendes

1. Durch Entwickeln des Spur-Ausdruckes finden wir, daß sich die formal vorhandene quadratische und lineare Divergenz wegen der Eichterme herauskürzen und nur ein logarithmisch divergenter Anteil bleibt.
2. Eichinvarianz läßt sich am Integranden bereits rein algebraisch beweisen, ohne Integration oder Limes $\varepsilon \to 0$!

$$k_1^{\sigma_1}\,\Gamma^2_{\mu\nu}\left(\begin{matrix}k_1 & k_2\\ \sigma_1 & \sigma_2\end{matrix};\varepsilon\right) = k_2^{\sigma_2}\,\Gamma^2_{\mu\nu}(\ldots;\varepsilon) = 0$$

Für den Symmetrisierungsterm im E.T. vereinfacht sich die Diskussion wesentlich, da wir für den γ^5 Strom auf wohlbekannte Ergebnisse zurückgreifen können (die Ableitung $\partial^\rho(x)$ bewirkt im Gegensatz etwa zu $\partial_\nu(\varepsilon)$ keine Änderung des Divergenzgrades). Eichinvarianz bewirkt hier, daß die formal linear divergente Amplitude in Wirklichkeit endlich ist (siehe Adler /62/). Da die Struktur des Integranden im wesentlichen aber dieselbe ist wie bei $\Gamma^2_{\mu\nu}$, ist auch das gesamte Integral eichinvariant (die Ersetzung $k_\nu\gamma_\mu \to \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^5\gamma^\sigma$ ändert nichts am Beweis, siehe (A9)) und daher endlich.

Wir diskutieren nun die Ordnung N = 4 (mit dem Vertex für $T_{\mu\nu}$ insgesant ein Fünfeck-Loop). Formal ist lediglich der kanonische Anteil des E.T. nach Abzählen der Potenzen logarithmisch divergent. Die vollständige Amplitude lautet Bose-symmetrisiert und mit den notwendigen Eichtermen

$$\Gamma^4_{\mu\nu}\begin{pmatrix} k_1 \cdots k_4 \\ \sigma_1 \cdots \sigma_4 \end{pmatrix}; \varepsilon) = -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{2i(\varepsilon k)} k_\nu \sum_{\substack{\text{Perm} \\ \{k_1 \cdots k_4\} \\ \{\sigma_1 \cdots \sigma_4\}}} Sp\Big[\gamma_\mu \Big\{ S\big(k+\tfrac{1}{2}(k_1+\ldots+k_4)\big)\gamma^{\sigma_1} S\big(k+\tfrac{1}{2}(-k_1+\ldots+k_4$$

$$\times \gamma^{\sigma_2} S\big(k+\tfrac{1}{2}(-k_1-k_2+k_3+k_4)\big)\gamma^{\sigma_3} S\big(k+\tfrac{1}{2}(k_1+\ldots+k_3-k_4)\big)\gamma^{\sigma_4} S\big(k+\tfrac{1}{2}(k_1+\ldots+k_4)\big) +$$

$$+ \partial^{\sigma_4}\Big(S\big(k+\tfrac{1}{2}(k_1+k_2+k_3)\big)\gamma^{\sigma_1} S\big(k+\tfrac{1}{2}(-k_1+k_2+k_3)\big)\gamma^{\sigma_2} S\big(k+\tfrac{1}{2}(-k_1-k_2+k_3)\big)\gamma^{\sigma_3} S\big(k-\tfrac{1}{2}(k_1+\ldots k_3)\big)$$

(3.45)

$$+ \tfrac{1}{2}\partial^{\sigma_3}\partial^{\sigma_4}\Big(S\big(k+\tfrac{1}{2}(k_1+k_2)\big)\gamma^{\sigma_1} S\big(k+\tfrac{1}{2}(k_2-k_1)\big)\gamma^{\sigma_2} S\big(k-\tfrac{1}{2}(k_1+k_2)\big)\Big) +$$

$$+ \tfrac{1}{6}\partial^{\sigma_2}\partial^{\sigma_3}\partial^{\sigma_4}\Big(S\big(k+\tfrac{k_1}{2}\big)\gamma^{\sigma_1} S\big(k-\tfrac{k_1}{2}\big)\Big) + \tfrac{1}{24}\partial^{\sigma_1}\partial^{\sigma_2}\partial^{\sigma_3}\partial^{\sigma_4} S(k) \Big\}\Big]$$

Zur Singularität des Integrals können maximal die führenden Potenzen von k in dem Spur-Ausdruck beitragen. Wir benötigen daher von den Taylor-Entwicklungen der $S(k+\ldots)$ nur die führenden Terme $S(k)$ (und hiervon eigentlich nur $S = \frac{\not k}{m^2-k^2}$) und verwenden bequemerweise die Ward-Identität $\partial^\sigma S \equiv -S\gamma^\sigma S$ zur Ausführung der Ableitungen. Wir erhalten folgende führende Terme unter der Spur

$$\sum_{\substack{\text{Perm} \\ \sigma_1 \cdots \sigma_4}} \Big\{ S(k)\gamma^{\sigma_1} S\gamma^{\sigma_2} S\gamma^{\sigma_3} S\gamma^{\sigma_4} S + \partial^{\sigma_4}\big(S\gamma^{\sigma_1} S\gamma^{\sigma_2} S\gamma^{\sigma_3} S\big) +$$

(3.46)

$$+ \tfrac{1}{2}\partial^{\sigma_3}\partial^{\sigma_4}\big(S\gamma^{\sigma_1} S\gamma^{\sigma_2} S\big) + \tfrac{1}{12}\partial^{\sigma_2}\partial^{\sigma_3}\partial^{\sigma_4}\big(S\gamma^{\sigma_1} S\big) + \tfrac{1}{24}\partial^{\sigma_1}\partial^{\sigma_2}\partial^{\sigma_3}\partial^{\sigma_4} S(k) \Big\}$$

Da über alle Reihenfolgen der Indizes summiert, ergeben sich nach der Differentiation identische Ausdrücke, die sich gerade herausheben

$$\sum_{\text{Perm}} \Big\{ (1234) - 4\cdot(1234) + \tfrac{1}{2}\cdot 12\,(1234) + \big(-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{24}\big)(1234) \Big\} = 0$$

Damit ist gezeigt, daß sich in der Ordnung N = 4 die logarithmischen Singularitäten ebenfalls mit denen der Eichterme herausheben, und die gesamte Amplitude somit endlich und eichinvariant ist.

Wir können daher zusammenfassend folgendes feststellen

1. Die Struktur der Singularitäten ist prinzipiell ähnlich wie beim elektromagnetischen Strom und tritt formal bis zur Ordnung N = 4 auf (d.h. bis zum Fünfeck-Loop; es treten gerade die ungeraden Ordnungen auf, d.h. gerade Ordnungen in den A^μ Vertizes).
2. Eichinvarianz verringert den Grad der Divergenz auf eine logarithmische in der Ordnung N = 2 und beseitigt die logarithmische Divergenz in der Ordnung N = 4 völlig.
3. In der Ordnung N = 0 tritt die bekannte Singularität vierten Grades auf, welche auch schon in der freien Dirac-Theorie nur durch eine zusätzliche Subtraktion (bzw. ad hoc definierte "Normalordnung") beseitigt werden kann. Es gibt aber dabei kein der Ladungskonjugationsinvarianz verwandtes Prinzip, welches das Verschwinden der freien Vakuum-Amplitude erzwingen könnte.
4. Interessant ist, daß der γ^5 Anteil im Symmetrisierungsterm des E.T. überhaupt keinen singulären Beitrag liefert, somit die Symmetrisierung keinen Einfluß auf die Regularisierung hat. Bei Konstruktion der Poincaré-Generatoren treten Singularitäten daher nur über den kanonischen Anteil des E.T. auf.

III 4. Anomalien der Erhaltungssätze

Wir wenden uns nun den Erhaltungssätzen des E.T. zu und untersuchen ihre Gültigkeit im Rahmen der bisher entwickelten Störungstheorie für die Dirac-Theorie im äußeren Maxwellfeld. Dazu verwenden wir die in "point-splitting" eichinvariant formulierten Relationen (3.23),(3.26),(3.27). Wir beginnen mit dem Erhaltungssatz und entwickeln die rechte Seite nach

$$\partial^\mu \tilde{T}^D_{\mu\nu}(x;\varepsilon) = -\tfrac{1}{2}\partial_\nu(\varepsilon)\left\{\tilde{j}_\mu(x;\varepsilon)\int_{x_-}^{x_+} d\xi^\sigma F_{\sigma\mu}(\xi)\right\}$$

(3.23)

$$= -\tilde{j}_\mu F_\nu{}^\mu(x) - \left(\partial^\sigma \tilde{j}_\mu(x;\varepsilon)\right)\varepsilon^\sigma F_{\sigma\nu}(x) + \partial_\nu(\varepsilon)\left(\tilde{j}_\mu \cdot O(\varepsilon^3)\right)$$

Für die Diskussion der Divergenzen ist zu beachten, daß ${}_A\langle 0|\, \tilde{j}_\mu(x;\varepsilon)\,|0\rangle_A$ hier nach ungeraden Ordnungen im Potential A (x) zu entwickeln ist und daher tatsächlich als Matrixelement des Stromes zu interpretieren ist (allein an der logarithmisch divergierenden Amplitude wäre diese Operatorstruktur nicht zu erkennen). Diese Entwicklung beginnt mit der Vakuum-Polarisation, welche in eichinvarianter Formulierung logarithmisch divergiert. Daher beginnt die Entwicklung nach $A^\lambda(x)$

$$\partial_\nu(\varepsilon)\,{}_A\langle 0|\,\tilde{j}_\mu(x;\varepsilon)\,|0\rangle_A = \partial_\nu(\varepsilon)\,\tilde{\Pi}_{\mu\lambda}(x,y;\varepsilon)\cdot A^\lambda(y) + O(A^3) \tag{3.47}$$

mit einem linear divergierenden Term $\partial_\nu(\varepsilon)\,\tilde{\Pi}_{\mu\lambda}(x,y;\varepsilon)$. Wir ersehen daher aus Gleichung (23), daß die erste Ordnung der Entwicklung nach ε^λ möglicherweise im Limes $\varepsilon \to 0$ einen endlichen Beitrag ergibt. Diesen zusätzlichen Term zum Erhaltungssatz

$$\mathcal{Z}_\nu(x) = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\partial_\nu(\varepsilon)\langle \tilde{j}_\mu(x;\varepsilon)\rangle\right)\varepsilon^\sigma F_{\sigma\mu}(x) \tag{3.48}$$

können wir auf verschiedene Arten berechnen. Dazu betrachten wir die Fouriertransformierte der Vakuumpolarisation (siehe z.B. /8/)

$$\langle \tilde{j}_\mu(x;\varepsilon)\rangle_A = ie^2\int d^4k_1 e^{ik_1x} A_\lambda(k_1)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{2i(\varepsilon k)}\,\mathrm{Sp}\Big[\gamma_\mu\Big\{S(k+\tfrac{k_1}{2})\gamma^\lambda S(k-\tfrac{k_1}{2}) + \partial^\lambda\Big(1+\tfrac{1}{2i}(k_1\partial)^2\Big)S(k)\Big\}\Big]$$

Wir können nun entweder explizit die Abhängigkeit von ε^λ bestimmen und anschließend die Operation $-\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^\sigma\partial_\nu(\varepsilon)\,\%$ durchführen oder (für analoge Rechnungen zur "Adler-Anomalie" siehe /69/) die Ableitung $\partial_\nu(\varepsilon)$ ausführen und ε^σ in eine Ableitung $\partial^\sigma(k)$ des Exponenten $e^{2i(\varepsilon k)}$ umwandeln, welche nach partieller Integration im Limes $\varepsilon \to 0$ einen "Oberflächenterm" ergibt, welcher formal divergent ist, aber bei symmetrischer Integration endlich wird. Beide Resultate ergeben das gleiche ~~Resultat~~ (siehe Anhang A10)

$$(3.49)\qquad \Theta_\nu(x) = \frac{e^2}{72\pi^2}\left\{4F^{\lambda\mu}(x)\partial^\lambda F_{\lambda\mu}(x) + \partial^\lambda\left(F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}\right) + \partial_\nu\left(F_{\lambda\mu}F^{\lambda\mu}\right)\right\}$$

also einen explizit eichinvarianten, anomalen Beitrag zum Erhaltungssatz, der formal große Ähnlichkeit zur "Adler-Anomalie" besitzt. Wir interessieren uns noch für die Richtungsabhängigkeit dieses Ergebnisses von ε^μ. Dazu benützen wir folgenden Ausdruck (/73/, siehe (A10)) für die Vakuum-Polarisation mit "point-splitting"

$$\begin{aligned}\widehat{\Pi}_{\mu\lambda}(k_1,\varepsilon) &= i\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{2i(\varepsilon k)}Sp\left[\gamma_\mu\left\{S(k+\tfrac{k_1}{2})\gamma_\lambda S(k-\tfrac{k_1}{2}) + \right.\right.\\ &\qquad\left.\left. + \partial_\lambda\left(1+\tfrac{1}{2}(k_1\partial^2)\right)S(k)\right\}\right]\\ &= -\frac{1}{2\pi^2}\left(g_{\mu\lambda}k_1^2 - k_{1\mu}k_{1\lambda}\right)\int_0^1 du\,u(1-u)\int_0^\infty\frac{dx}{x}e^{-i\left[x\left(m^2+k_1^2u(1-u)\right)\right]+\frac{i\varepsilon^2}{x}} + \\ &\quad + \frac{1}{12\pi^2}\frac{1}{\varepsilon^2}\left[\left(\varepsilon_\mu k_{1\lambda}+\varepsilon_\lambda k_{1\mu}\right)(\varepsilon k_1) - g_{\mu\lambda}(\varepsilon k_1)^2 - k_1^2\varepsilon_\mu\varepsilon_\lambda\right]\end{aligned}\qquad (3.50)$$

Wir bemerken, daß ε^μ im ersten Integralterm über $e^{i\frac{\varepsilon^2}{x}}$ die Rolle eines kovarianten "Cutoff" übernimmt. Der zweite Term jedoch ist richtungsabhängig und verschwindet bei symmetrischer Mittelung $\langle\varepsilon_\mu\varepsilon_\nu\rangle = \frac{1}{4}\varepsilon^2 g_{\mu\nu}$ (deshalb wird er gewöhnlich überhaupt weggelassen bei Verfahren, die vorneherein symmetrische Integration benutzen). Wir benötigen diesen Beitrag, da wir erst nach Anwendung von $\varepsilon^\sigma\partial_\nu(\varepsilon)$ mitteln dürfen. Wir erhalten nach Anwendung von $\varepsilon^\sigma\partial_\nu(\varepsilon)$ ein für $\varepsilon\to 0$ konvergentes aber richtungsabhängiges Ergebnis

$$\begin{aligned}\varepsilon^\sigma\frac{\partial}{\partial\varepsilon^\nu}\widehat{\Pi}^{\mu\lambda}(k_1,\varepsilon) &= -\frac{1}{2\pi^2}\left(g^{\mu\lambda}k_1^2 - k_1^\mu k_1^\lambda\right)\int_0^1 du\,u(1-u)\,2i\varepsilon^\sigma\varepsilon^\nu\int_0^\infty\frac{dx}{x^2}e^{-i\left[x(\dots)-\frac{\varepsilon^2}{x}\right]}\\ &\quad + \frac{1}{12\pi^2}\left\{\frac{\varepsilon^\sigma}{\varepsilon^2}\left[\left(g^{\mu\nu}k_1^\lambda + g^{\lambda\nu}k_1^\mu\right)(\varepsilon k_1) + \left(\varepsilon^\mu k_1^\lambda + \varepsilon^\lambda k_1^\mu\right)k_1^\nu - \right.\right.\\ &\qquad\left. - 2g^{\mu\lambda}k_1^\nu(\varepsilon k_1) - k_1^2\left(g^{\mu\nu}\varepsilon^\lambda + g^{\nu\lambda}\varepsilon^\mu\right)\right] -\\ &\qquad\left. - \frac{2\varepsilon^\sigma\varepsilon^\nu}{\varepsilon^4}\left[\left(\varepsilon^\mu k_1^\lambda + \varepsilon^\lambda k_1^\mu\right)(\varepsilon k_1) - g^{\mu\lambda}(\varepsilon k_1)^2 - k_1^2\varepsilon^\mu\varepsilon^\lambda\right]\right\}\end{aligned}\qquad (3.51)$$

Das Integral ist vom Typ

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}\, e^{-ix(m^2+\dots)-i\frac{\varepsilon^2}{x}} = \frac{i}{\varepsilon^2} + O\left[\log\left((m^2+\dots)\varepsilon^2\right) \text{ etc.}\right] \tag{3.52}$$

so daß mit den Faktoren $\varepsilon^\sigma\varepsilon^\nu$ im Limes $\varepsilon \to 0$ nur eine quadratische k_1 Abhängigkeit in $\tilde{z}_\nu(k_1)$ bleibt

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^\sigma \frac{\partial}{\partial\varepsilon^\nu} \Pi^{\mu\lambda}(k_1;\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{6\pi^2}(g^{\mu\lambda}k_1^2 - k_1^\mu k_1^\lambda)\frac{\varepsilon^\sigma\varepsilon^\nu}{\varepsilon^2} + \frac{1}{12\pi^2}\{\dots\}\right] \tag{3.53}$$

Die Mittelung nach Formel (3.41) liefert dann

$$\begin{aligned}\left\langle \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^\sigma \frac{\partial}{\partial\varepsilon^\nu} \Pi^{\mu\lambda}(k_1;\varepsilon)\right\rangle = \frac{1}{720\pi^2}\{&4g^{\sigma\nu}(g^{\mu\lambda}k_1^2 - k_1^\mu k_1^\lambda) + g^{\sigma\nu}(k_1^\sigma k_1^\lambda - k_1^2 g^{\sigma\lambda}) \\ &+ g^{\nu\lambda}(k_1^\sigma k_1^\mu - k_1^2 g^{\mu\sigma}) + k_1^\nu(g^{\mu\sigma}k_1^\lambda + g^{\sigma\lambda}k_1^\mu) - 2g^{\mu\lambda}k_1^\nu k_1^\sigma\}\end{aligned} \tag{3.54}$$

Die Eichinvarianz gilt dabei auf jeder Stufe der Rechnung unabhängig von der Integration. Im Ortsraum erhalten wir daher nach Zusammenfassen der entsprechenden Terme das Resultat (3.49).

Weiter betrachten wir Spur- und Symmetrie-Identität (26),(27). Die Entwicklung der Spur $\widetilde{T}\Gamma_\mu(x)$ nach $\varepsilon\Gamma$ beginnt mit $\widetilde{j}_\mu(x;\varepsilon)\,O(\varepsilon^3)$ und ergibt wegen der maximal logarithmischen Divergenz von $\langle\widetilde{j}_\mu\rangle$ keinen Beitrag für $\varepsilon \to 0$. Für die Symmetrie-Identität könnte jedoch der γ^5 Anteil einen möglichen Zusatzterm bringen. Dazu betrachten wir das Matrixelement des γ^5 Stromes bzw. dessen funktionale Entwicklung nach A (x)

$$\underset{A}{\langle 0|}\, \widetilde{j}^5(x;\varepsilon)\,|0\rangle_A = -iSp\left[\gamma_5\gamma^5\{S(-\varepsilon) + eS\cdot\not{A}\cdot S + O(e^2)\right]\phi(x_+,x_-) \tag{3.55}$$

Der erste Term trägt wegen $Sp[\gamma_\sigma\gamma^5 S] = 0$ nichts bei. Zu beachten ist, daß von den höheren Termen die in $A^\Gamma(x)$ ungeraden Terme beitragen, da wegen Invarianz gegen Ladungskonjugation die gesamte Amplitude von gerader Ordnung im Photonfeld sein muß und $\widetilde{j}^5$ bereits invariant ist. Deswegen können auch nur

gerade Potenzen von ε^r beitragen (siehe dazu die Bemerkungen bei (3.28) bis (3.31)), so daß von dem in Frage kommenden Term $e(S\cdot\not{A}\cdot S)$, der formal quadratisch divergiert, maximal der lineare Anteil beitragen kann.

Die genaue Diskussion des Feynman-Integrales zeigt aber, daß die quadratische Divergenz wegen der γ^5 Eigenschaften auf eine lineare reduziert wird. Im Limes $\varepsilon \to 0$ trägt folgender Term der Spur bei

$$(3.56)\quad Sp[\gamma^5\gamma^\sigma S(k)\gamma^\lambda S(k-k_1)] = Sp[\gamma^5\gamma^\sigma \not{k}_1\gamma^\lambda \not{k}](m^2-k^2)^{-2} + O(k^{-4})$$

Die Integration ergibt folgende Abhängigkeit von ε^r

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{2i(\varepsilon k)} \frac{k^\alpha}{(m^2-k^2)^2} = i\int_0^\infty dx\, x\, e^{-ixm^2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{2i(\varepsilon k)+ixk^2}\cdot k^\alpha$$

$$= i\int_0^\infty \frac{dx}{ix^2} e^{-ixm^2}\frac{\pi^2}{(2\pi)^4}\varepsilon^\alpha e^{-i\frac{\varepsilon^2}{x}}$$

$$= \frac{\varepsilon^\alpha}{16\pi^2}\int_0^\infty \frac{dx}{x^2} e^{-ixm^2-i\frac{\varepsilon^2}{x}} = \frac{\varepsilon^\alpha}{16\pi^2}\left\{\frac{i}{\varepsilon^2} + O(\log\varepsilon^2\dots)\right\}$$

und mit der Spur zusammen ergeben alle ε Terme

$$(3.57)\quad \frac{1}{16\pi^2}\int_0^\infty \frac{dx}{x^2} e^{-ixm^2-\frac{i\varepsilon^2}{x}}\ \varepsilon_\sigma\varepsilon_\alpha\left(-4i\varepsilon^{\sigma\alpha\lambda\beta}\right)k_{1\beta} = 0$$

Daher trägt das Integral nichts zur Symmetrie-Identität bei, und zwar allein auf Grund der algebraischen Eigenschaften des Integrals und nicht der Divergenzeigenschaften. Außerdem mußte dazu keine Mittelung durchgeführt werden. (Das Ergebnis ist mit symmetrischen Integrationsverfahren das gleiche, da die algebraische Struktur natürlich invariant gegen Mittelung sein muß!). Mit der Bemerkung, daß in der Spur-Identität ebenfalls keine Anomalie auftritt, da die ε -Entwicklung erst mit $O(\varepsilon^2)$ beginnt, multipliziert mit dem nur logarithmisch divergenten Matrixelement $\langle \widetilde{j_\mu}(x;\varepsilon)\rangle$, können wir daher unsere Diskussion der Erhaltungssätze abschließen.

Zusammenfassung und Diskussion

Die Aufgabenstellung der vorliegenden Arbeit war es, die Operatoreigenschaften des Energie-Impuls-Tensors in der Quantenelektrodynamik zunächst im Rahmen der bekannten Methoden der Quantenfeldtheorie (kanonische Quantisierung,Störungstheorie etc.) zu untersuchen.Wie sich im einzelnen gezeigt hat, erreicht man sehr schnell Grenzen, an denen man gezwungen ist, die kanonische Basis zu verlassen.Dabei öffnet sich natürlich ein sehr weites Feld der Möglichkeiten, so daß die durchgeführten Ansätze keineswegs als abgeschlossen angesehen werden können.Folgende Probleme konnten daher in dem gegebenen Rahmen nur teileise oder gar nicht gelöst werden.

1. Die in "Coulomb-Eichung" auftretenden Operatorordnungs-Probleme konnten zwar für den Fall der einfacheren Generator-Relationen mit dem ET. konsistent gelöst werden,traten jedoch im Fall der verallgemeinerten Dirac-Schwinger-Bedingungen in Form der singulären "Coulomb-Terme" wieder zu Tage. Unklar ist, ob daran mit einer anderen Operatorordnung (für die es nicht mehr viel Alternativen gibt) oder mit einer anderen Konstruktion des ET. etwas geändert werden kann. Subtraktion allein der singulären Terme genügt nicht,da dann sehr wahrscheinlich die Generator-Algebra gestört würde.
2. Die verallgemeinerten Dirac-Schwinger-Bedingungen, die wir bis zur zweiten Ableitung diskutierten, sind im Fall der Quantenelektrodynamik nicht erfüllt. Da unsere Basis sehr allgemeine Voraussetzungen über Poincaré-Invarianz und Tensor-Transformationseigenschaften waren, könnte diese Tatsache auf einen Widerspruch zwischen der Algebra der Generatoren und den Transf.-Eigenschaften der sie erzeugenden Felder hinweisen. Es erscheint daher interessant, auch höhere, nichtkanonische "Schwinger-Terme" in den allgemeinen Ansatz mit einzubeziehen, um Konsistenz zu erreichen.Möglicherweise lassen sich dann auch Operatoreigenschaften von solchen "Schwinger-Termen" feststellen.
3. Die wichtigsten Resultate der nichtkanonischen "Point-Splitting" methode sind natürlich zum einen die "Anomalie" im Erhaltungssatz für den Dirac-Teil des ET. und zum

anderen die Verbesserung der Konvergenz der Vakuum-Amplitude des ET. durch Eichinvarianz. Es ist möglich, daß die enge Analogie der Probleme mit den Fragen, die bei der Renormierung des elektromagnetischen Stromes auftreten,auch zu einem Ansatz für eine Renormierung des ET. im Rahmen der reinen Quantenelektrodynamik führen könnte.
Die Verletzung des Erhaltungssatzes kann natürlich nur ein vorläufiges Ergebnis sein, dem eine genauere Untersuchung über die Folgen für die Poincaré-Invarianz der vollen Theorie folgen müßte.Insbesondere müßte die "Anomalie" in komplizierteren Matrixelementen untersucht werden, um ihr Verhalten bei Renormierung zu testen.Bleibt diese Symmetrie-Brechung jedoch in ihrer jetzigen Form bestehen, so bedeutet das einen fundamentalen Widerspruch zwischen Eichinvarianz und Poincaré-Invarianz.Über einen Ausweg aus dieser Situation läßt sich vielleicht im Zusammenhang mit "Spontaner Symmetriebrechung" spekulieren,wobei darauf hinzuweisen ist, daß das Problem der Konstruktion von kanonischen Generatoren in Eichtheorien mit spontaner Symmetriebrechung noch nicht befriedigend gelöst ist.Die Frage nach den Symmetrien einer Theorie kann dabei nicht von dem Problem der Konstruktion der entsprechenden Generatoren getrennt werden.

Bei Betrachtung dieser Gründe können die Resultate der vorliegenden Arbeit nur als kleiner Beitrag gesehen werden, wenn selbst im engeren Rahmen der Quantenelektrodynamik,die ja sonst als Musterbeispiel einer Quantenfeldtheorie dient, noch derart grundlegende Probleme offen bleiben

An dieser Stelle möchte ich meinem verehrten Lehrer Prof. Mitter herzlichst danken für die vielseitige Förderung, die er in der Vergangenheit sowohl meiner Person als auch dieser Arbeit zukommen ließ.Herrn Dr.Dittrich möchte ich vielmals danken für hilfreiche Kritik und zahlreiche anregende Diskussionen.Mein freundschaftlicher Dank geht an Herrn Dr.Becker für viele nützliche und angenehme Unterhaltungen.Unseren Sekretärinnen,Frau Pilf und Frau Roser danke ich für die Geduld und Sorgfalt bei der Ausarbeitung meiner Dissertation.
Der Studienstiftung des Deutschen Volkes bleibe ich für ein Stipendium sehr zu Dank verpflichtet.

Literaturverzeichnis

/1/ J.Schwinger,´Theory Of Quantized Fields´ I-VI (51)
Phys.Rev.82,914;91,713;91,728;92,1283;
93,615;94,1362;

/2/ -/- ´Non-Abelian Gauge Fields´(62)
Phys.Rev.125,1o43;127,324;13o,4o6;13o,8oo;

/3/ -/- ´Quantum Variables And Group Parameters´
Nuovo Cim. XXX,1,278 (63)

/4/ -/- ´Quantum Theory Of Gauge Fields ´
Lectures in ´Theor. Physics´,116 (Cargese 63)

/5/ -/- Phys.Rev.Lett.3,296 (59)
K.Johnson Nucl.Phys.25,431(61);31,464(62)

/6/ J.Schwinger ´On Gauge Invariance And Vacuum Polarisation´
Phys.Rev.82,664(51)

/7/ -/- ´Field Theory And Particles´ Brandeis 64,Vol.

/8/ K.Johnson ´Quantum Electrodynamics´Brandeis 64,Vol.2

/9/ P.A.M.Dirac ´Quantum Theory Of Localizable Systems´
Phys.Rev.73,1o92(48)

/1o/ -/- ´Forms Of Relativistic Dynamics´
Rev.Mod.Phys.21,392(49)

/11/ -/- The Conditions For A Quantum Field Theory
To Be Relativistic´Rev.Mod.Phys. 34,592(62)

/12/ -/- ´Lectures On Quantum Mechanics´New York (64)

/13/ B.Zumino ´Gauge Properties Of Propagators In QED´
J.Math.Phys. 1,1 (6o)

/14/ I.Bialynicki-Birula On The Gauge Covariance Of QED´
J.Math.Phys.3,1o94 (62)

/15/ H.Mitter ´High Energy QED I´Act.Austr.Supp.II (66)

/16/ -/- Vorlesung über Quantenfeldtheorie ´Tübingen(7

/17/P.Breitenlohner,H.Mitter ´Analytic Regularization And
Gauge InvarianceNucl.Phys.B7,443(68)

/18/ -/- ´Closed Loop Regularization And
Anomalous Ward Identities´Nuov.Cim.Xa,2,655(7

/19/ D.G.Boulware,S.Deser ´Necessary Dependence Of Currents On
Fields They Generate´Phys.Rev.151,1278(66)

/2o/ D.G,Boulware,S.Deser ´Stress-Tensor Commutators And Schwinger-Terms´J.Math.Phys.8,1468 (67)
/21/T.W.B,Kibble ´Lorentz Invariance And The GravitationalField´ J.Math.Phys.2,212 (61)
/22/ -/- ´Canonical Variables For The Interacting Gravitational And Dirac Fields´J.Math.Ph.4,1433
/23/ S.Deser,K.Morrison Stress-Tensor Commutators In Nonlinear Electrodynamics´J.Math!Phys.11,596 (7o)
/24/ -/- ´Current-Stress-Tensor Commutators´ J.Math.Phys.12,631 (71)
/25/ D.G.Boulware,S.Deser ´External Sources In Gauge Theories´ Nuov.Cim.XXX,4,1oo9 (63)
/26/ S.Deser Divergence Of Stress-Tensor In External Fields´ Lett.Nuov.Cim.1,866 (71)
/27/ -/- ´Gauges And Propagators In Curved Space´ Lett.Nuov.Cim. IV,113o (7o)
/28/ H.Genz,J.Katz ´Derivation Of Equal Time Commutators Involv. The Symm. Energy-Momentum-Tensor And Applications´Phys.Rev.D2,2225 (7O)
/29/ -/- ´Equal Time Commutators And The Enegy-Momentum-Tensor´ Nucl.Phys.B13,4o1 (69)
/3o/ -/- Dimensions And Equal Time Commutators Of Current Components´ preprint (7o)
/31/ M.A.B.Bég,J.Bernstein,D.J.Gross,R.Jackiw,A.Sirlin Dimensions Of Currents And Current Commutators´ Phys.Rev.Lett.25,1231 (7o)
/32/ L.Kannenberg,R.Arnowitt ´Stress-Tensor Operator For Fermion Field Interacting With Classical Grav. Field´ Ann.Phys.45,416 (67)
/33/ D.Z.Freedman,I.Muzinich,E.J.Weinberg On The Energy-Momentum-Tensor In Gauge Field Theories´Ann.Phys.87,95(74)
/34/ J.Wess Anomalous Ward-Identities´Act.Phys.Austr.SupIX(72)
/35/ J.Wess,B.Zumino ´Consequences Of Anomalous Ward-Identities´ Phys.Lett.37B,95 (71)
/36/C.G.Callan,S.Coleman,R.Jackiw´A New Improved Energy-Momentum-Tensor´ Ann.Phys.59,42 (7o)

/37/S.Coleman,R.Jackiw Why Dilatation Generators Do Not Generate Dilatations´ Ann.Phys.67,552 (71)

/38/ R.Utiyama ´Renormalization Of QED In A Classical Gravitational Field´Phys.Rev.125,1727 (62)

/39/ B.S.DeWitt,R.Utiyama Renormalization Of Classical Gravitational Field Interacting With Quantized Matter Field´ J.Math.Phys.3,6o8 (62)

/4o/ L.D.Faddeev,V.N.Popov ´Feynman Diagrams For The Yang-Mills Fields´Phys.Lett.25B,29 (67)

/41/ Th.Banks Ward Identities For The Energy-Momentum-Tensor´Phys.Rev.D5,2959 (72)

/42/ A.Rouet,R.Stora Ward Identities And The Trace Identities For The Energy-Momentum-Tensor´Lett.Nuov.Cim.4,156

/43/ R.Perrin ´Current-Stress-Tensor Commutators And Ward-Identities´ preprint NUB 2122 (72)

/44/ P.Stichel ´On The Validity Of Ward Identities´ Desy Preprint 7o/22

/45/ J.C,Katzin,W.B.Rollnik Response To The Variation Of An Ext. Grav. Field And Its Application For Equal Time Commutators´Phys.Rev182,14o3 (69)

/46/ -/- Validity Of The E.T.Comm.From The Action Principle´preprint Sep.7o

/47/ D.N.Levin Formal Restrictions On Schwinger Terms In Comm. Containing J And/Or T ´Phys.Rev.D3,132o(7

/48/F.Buccella,G.Veneziano,R.Gatto,S.Okubo Necessety Of Additional q-Number Schwinger Terms In Comm. Of Spatial Current Components´Phys.Rev.149,1268 (66)

/49/ C.A.Orzalesi,J.Sucher,C.H.Woo Local Tensor Fields And The Energy-Momentum Operator´Phys.Rev.Lett.21,155o

/5o/ S.Okubo General Properties Of q-Number Schwinger-Terms´Phys.Rev.D3,4o9 (71)

/51/ D.J.Gross,R.Jackiw Derivation Of SU(3)XSU(3) Space Time Local Current Comm.´Phys.Rev.163,1688 (67)

/52/ R.Jackiw ´Stress-Tensor-Current Comm.,Electrom.And Weak To Current Comm.,And Sum Rules´Ph.Rev.175,2o58

/53/ I.S.Gerstein,R.Jackiw Anomalies In Ward Identities For The Three Point Functions´Phys.Rev.181,1955 (69)

/54/ R.Jackiw,G.Preparata ´T-Products At High Energy And Commutators´ Phys.Rev.185,1929 (69)

/55/ D.G.Boulware,R.Jackiw ´Anomalous Commutators And The Box-Diagram´ Phys.Rev.186,1442 (69)

/56/ M.S.Chanowitz ´Schwinger Terms In Fermion Electrodynamics´ Phys.Rev.D2,3016 (7o)

/57/ D.G.Boulware,J.Herbert Nonexistence Of Schwinger Terms In Spinor QED´Phys.Rev.D2,1055 (7o)

/58/ T.C.Yang ´Covariant Time-Ordered Products Of N Conserved Currents´ Phys.Rev.D2,2312 (7o))

/59/ R.F.Dashen,S.Y.Lee Existence Of Covariant Time-Ordered Products Of Currents´Phys.Rev.187,2017 (69)

/6o/ D.J.Gross,R.Jackiw Construction Of Covariant And Gauge Invariant T -Products´ Nucl.Phys.B14,269 (69)

/61/ R.Jackiw Field Theoretic Investigation In Current Algebra´ in Lectures On Current Algebra And Applications´ (Princeton Series in Physics 72)

/62/ S.L.Adler Perturbation Theory Anomalies´Brandeis Lectures 7o

/63/ J.D.Bjorken,S.D.Drell Relativistische Quantenfeldtheorie´ B.I.Mannheim (67)

/64/ DeAlfaro,S.Fubini,G.Furlan,C.Rosetti Currents In Hadron Physics´ Amsterdam (73)

/65/ S.Weinberg Gravitation And Cosmology´ New York (72)

/66/ S.L.Adler ´Axial-Vector Vertex In Spinor Electrodynamics´ Phys.Rev.177,2426 (69)

/67/ S.L.Adler,W.A.Bardeen ´Absence Of Higher Order Corrections In The Anomalous Axial Vector Divergence Equation´ Phys.Rev.182,1517 (69)

/68/ S.L.Adler,D.G.Boulware Anomalous Commutators And The Triangle Diagram´Phys.Rev.184,1740 (69)

/69/ R.Jackiw,K.Johnson Anomalies Of The Axial-Vector Current´ Phys.Rev.182,1459 (69)

/7o/ W.A.Bardeen Anom. Ward Identities In Spinor Field Theories´ Phys.Rev.184,1848 (69)

/71/ R.W.Brown,Chia-Chang Shih,Bing-Lin Young ´Renormalization And Ward Id. Anomalies´Phys.Rev.186,1491 (69)

/72/ W.Kummer,M.Schweda The Interpretation Of Anomalies In Ward Identities´Nucl.Phys.B22,412 (7o)
/73/ C.R.Hagen ´Nonexistence Of Anomalous Commutators In Spinor Electrodynamics´Phys.Rev.188,2416 (69)
/74/ -/- ´Breakdown Of Current Algebra In Lagrangian Field Theories´Phys.Rev.178,2154 (69)
/75/ -/- Derivation Of Adler´s Divergence Condition From The Field Equations´Phys.Rev.177,2622 ((9)
/76/ Y.Takahashi An Introduction To Field Quantization´Oxford (69)
/77/ H.M.Fried Functional Methods And Models In Quantum Field Theory´ MIT Press,Cambridge (72)
/78/ J.Katz ´Classical Mechanics,Quantum Mechanics,Field Theory´ New York (65)
/79/ J.Schwinger Quantum Kinematics And Dynamics´ New York (7o)
/8o/ -/- ´Particles,Sources And Fields´Vol.I,New York (7o)
/81/ Corinaldesi,Strocchi ´Relativistic Wave Mechanics´Amsterdam(6
/82/ G.Wentzel Quantum Theory Of Fields´ New York (49)
/83/ L.D.Landau,E.M.Lifschitz Klassische Feldtheorie´ Berlin (67)
/84/ J.B.DeWitt ´Dynamical Theory Of Groups And Fields´New York(65
/85/ J.Wess ´Tensor And Scalar Dominance Of The Energy Momentum Tensor´ in ´Scale And Conformal Symmetry In Hadron Physics´by R.Gatto,New York (72)

Anhang 1

Wir betrachten die Kommutatoren für die elektromagnetischen Feldstärken. Für die Komponeneten F_{ik} trägt nur der Maxwell-Anteil bei.

$$[T_{o\mu}(x), F_{ik}(y)] = \partial_i(y)\,[T_{o\mu}(x), A_k(y)] - \partial_k(y)\,[T_{o\mu}(x), A_i(y)]$$

Mit (2.53) folgt dann

$$[T_{o\mu}(x), F_{ik}(y)] = i F_{\mu\sigma}(x)\left(g^{\sigma}{}_{k}\partial_i\delta(\vec{x}-\vec{y}) - g^{\sigma}{}_{i}\partial_k\delta(\vec{x}-\vec{y})\right)$$

$$= i\left(F_{\mu k}(x)\,\partial_i\delta(\vec{x}-\vec{y}) - F_{\mu i}(x)\,\partial_k\delta(x-y)\right)$$

(A1.1)

$$= -i\left(\partial_i F_{\mu k}(x) - \partial_k F_{\mu i}(x)\right)\delta(x-y) + i\left(F_{\mu k}(y)\,g_{ij} - F_{\mu i}(y)\,g_{kj}\right)\partial^{j}\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

$$= -i\,\partial_\mu F_{ik}(y)\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) - i\left(F_{\mu i}(y)\,g_{kj} - F_{\mu k}(y)\,g_{ij}\right)\partial^{j}\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

Für F_{ok} verwenden wir (2.56) und erhalten zunächst für den Maxwell-Anteil

$$\left[T^{M}_{o\mu}, F_{ok}(y)\right] = \left[\tfrac{1}{8}g_{\mu o}\{F_{\lambda\tau}, F^{\lambda\tau}\} + \tfrac{1}{2}\{F_{o\ell}, F^{\ell}_{\mu}\}\,,\, F_{ok}(y)\right]$$

$$= i g_{\mu o}\left(\partial^{\ell}F_{ek}(x)\,\delta(x-y) - F_{ek}(y)\,\partial^{\ell}\delta(x-y)\right) -$$

$$- i g_{\mu}{}^{m}\Big(g_{km}\left(-\partial_e F_o{}^{\ell}(x)\,\delta(x-y) + F_{o\ell}(y)\,\partial^{\ell}\delta(x-y)\right) + \partial_m F_{ok}(x)\,\delta(x-y) - F_{ok}(y)\,\partial_m\delta(x-y)\Big)$$

Voraus mit der Maxwell-Gleichung dann folgt

$$= -i g_{\mu o}\left(\left(\partial^{o}F_{ok} + (j_k + J_k)\right)\delta(\vec{x}-\vec{y}) - F_{ek}(y)\,\partial^{\ell}\delta(\vec{x}-\vec{y})\right)$$

$$- i g_{\mu}{}^{m}\Big(\left(\partial_m F_{ok}(x)\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) - g_{km}(j_o + J_o)\,\delta(\vec{x}-\vec{y})\right) + \left(g_{km}F_{o\ell}(y) - F_{ok}(y)\,g_{m\ell}\right)\partial^{\ell}\delta(\vec{x}-\vec{y})\Big)$$

Für den Dirac-Teil erhalten wir mit $[F_{ok}(x), \psi(y)] = e\psi(y)\,\partial_k\delta(\vec{x}-\vec{y})$

$$\left[T_{0\mu}^{D}(x),\, F_{0k}(y)\right] = \frac{i}{8}(1+g_{\mu 0})\left\{-\left[\partial_0\bar\psi\gamma_\mu,\left[\bar\psi, F_{0k}\right]\right] - \left[\left[\partial_0\bar\psi, F_{0k}\right],\gamma_\mu\psi\right]\right.$$
$$+\left[\bar\psi\gamma_\mu,\left[\partial_0\psi, F_{0k}\right]\right]+\left[\left[\bar\psi, F_{0k}\right],\gamma_\mu\partial_0\psi\right]\Big\} +$$
$$+\frac{i}{4}g_\mu{}^i\left\{\left[\left[\bar\psi, F_{0k}\right],\gamma_0\overleftrightarrow{\partial_i}\psi\right] + \left[\bar\psi\gamma^0\overleftrightarrow{\partial i},\left[\psi, F_{0k}\right]\right]\right\}$$

Mit Hilfe der Dirac-Gleichung (2.15) folgt

$$\left[\partial^0\psi(x), F_{0k}(y)\right] = e\,\partial^0\psi(x)\,\partial_k\mathfrak{D}(\vec{x}-\vec{y}) + e\gamma^0\gamma^\ell\psi(x)\,g_{k\ell}\,\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

und damit

$$\left[T_{0\mu}^{D}(x), F_{0k}(y)\right] = -\frac{i}{2}g_\mu{}^\ell j^0{}_\ell(x)\,\partial_k\partial_\ell\mathfrak{D}(\vec{x}-\vec{y}) + \frac{i}{2}(1+g_{\mu 0})\left(g_{\mu k}j^0(x) - g_{\mu 0}j_k(x)\right)\delta($$

Für den WW-Term, sowie den Quellen-Term folgt

$$\left[T_{0\mu}^{W}(x), F_{0k}(y)\right] = \frac{i}{2}g_\mu{}^\ell j_0(x)\left(g_{k\ell}\delta(\vec{x}-\vec{y})\right)^T$$

$$\left[T_{0\mu}^{Q}(x), F_{0k}(y)\right] = i\left(g_\mu{}^k J_0(x) - g_{\mu 0}J^k(x)\right)\left(g_{k\ell}\delta(\vec{x}-\vec{y})\right)^T$$

und zusammengefaßt das Ergebnis

$$\left[T_{0\mu}(x), F_{0k}(y)\right] = -i\,\partial_\mu F_{0k}(x)\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) -$$
$$-i\left[g_{\mu 0}F_{ek}(y) + g_\mu{}^m\left(g_{km}F_{0\ell}(y) - F_{0k}(y)g_{\ell m}\right)\right]\partial^\ell\delta(\vec{x}-\vec{y}) \qquad \text{(A.1.2)}$$
$$+i\left(g_\mu{}^m J_0(x) - g_{\mu 0}J^m(x)\right)\partial_k\partial_m\mathfrak{D}(\vec{x}-\vec{y})$$

Wir fügen der Vollständigkeit halber noch die Relation mit den T_{ik} an $(Q=0)$

$$\left[T_{ik}(x), F_{0\ell}(y)\right] = -i\left[g_{ik}F_{m\ell}(x)\,\partial^m\delta(\vec{x}-\vec{y}) - g_{i\ell}F_{mk}(x)\,\partial^m\delta(\vec{x}-\vec{y}) -\right.$$
$$-g_{k\ell}F_{mi}(x)\partial^m\delta(\vec{x}-\vec{y}) + F_{\ell k}(x)\partial_i\delta(\vec{x}-\vec{y}) + F_{\ell i}(x)\partial_k\delta(\vec{x}-\vec{y})\Big] \qquad \text{(A1.3)}$$
$$-\frac{i}{2}\left[j_i(x)g_{k\ell} + j_k g_{i\ell}\right]\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

$$\left[T_{ik}(x), F_{m\ell}(y)\right] = -i\Big[g_{ik}\left(F_{0\ell}(x)\partial_m\delta(\vec{x}-\vec{y}) - F_{0m}(x)\partial_\ell\delta(\vec{x}-\vec{y})\right)$$
$$+F_{0i}(x)\left(g_{km}\vec{\partial_\ell} - g_{k\ell}\vec{\partial_m}\right)\delta(\vec{x}-\vec{y}) +$$
$$+F_{0k}(x)\left(g_{i\ell}\vec{\partial_m} - g_{im}\vec{\partial_\ell}\right)\delta(\vec{x}-\vec{y})\Big]$$

Anhang 2

Wir betrachten "Boost-Operator"

$$[M_{ok}, A_\ell(y)] = -iy_o\partial_k A_\ell(y) - \int d^3x\, x_k [T_{oo}(x), A_\ell(y)]$$

(A2.1)

$$= -iy_o\partial_k A_\ell(y) + i\int d^3x\, x_k\, F_{oi}(x)\,(g^i{}_\ell\,\delta(\vec{x}-\vec{y}))^T$$

$$= -iy_o\partial_k A_\ell(y) + iy_k F_{o\ell}(y) - i\int d^3x\, x_k F_{oi}(x)\,\partial^i\partial_\ell D(\vec{x}-\vec{y})$$

$$= -iy_o\partial_k A_\ell(y) + iy_k\partial_o A_\ell(y) - iy_k\partial_\ell A^o(y) + i\partial_\ell(y)\int d^3x\, x_k F_{oi}(x)\,\partial^i D(\vec{x}-\vec{y})$$

$$= -i(y_o\vec{\partial}_k - y_k\vec{\partial}_o)A_\ell(y) + ig_{k\ell}A_o(y) - i\partial_\ell(y_k A_o) + i\partial_\ell(y)\int d^3x\, x_k F_{oi}\,\partial^i D(\vec{x}-\vec{y})$$

$$= -i(y_o\vec{\partial}_k - y_k\vec{\partial}_o)A_\ell(y) + ig_{k\ell}A_o(y) + i\partial_\ell(y)\int d^3x\,(y_k j^o(y) D(\vec{x}-\vec{y}) + x_k F_{oi}(x)\,\partial^i D(\vec{x}-\vec{y}))$$

$$= -i(y_o\vec{\partial}_k - y_k\vec{\partial}_o)A_\ell(y) + ig_{k\ell}A_o(y) + i\partial_\ell(y)\Lambda_k(y)$$

mit dem Eich-Term gemäß Gl. (2.65). Für Konforme Transf. erhalten wir

$$[K^\nu, A_\ell(y)] = \int d^3x\,(2x^\nu x^\lambda - g^{\nu\lambda}x^2)\,[T_{o\lambda}(x), A_\ell(y)]$$

(A2.2)

$$= -i(2y^\nu y^\lambda - g^{\nu\lambda}y^2)F_{\lambda\ell}(y) + i\int d^3x\,(2x^\nu x^\lambda - g^{\nu\lambda}x^2)F_{\lambda i}(x)\,\partial^i\partial_\ell D(\vec{x}-\vec{y})$$

$$= -i(2y^\nu y^\lambda - g^{\nu\lambda}y^2)\partial_\lambda A_\ell - 2iy^\alpha[g_{\alpha\nu}g^\lambda{}_\ell - (g^\nu{}_\ell g^\lambda{}_\alpha - g_{\alpha\ell}g^{\nu\lambda})]A_\lambda(y) + N$$

wobei sich für den Restbetrag ergibt

$$N = -2i(1+2g^{\nu o})\,\partial_\ell(y)\int d^3x\, A^\nu(x)\,D(\vec{x}-\vec{y})$$

Für $A^o(y)$ folgt ein analoges Ergebnis.

Anhang 3

Wir beweisen gesondert die Dirac-Schwinger-Relation

$$[T_{00}(x), T_{00}(y)]_{x^0=y^0} = -i\,(T_{0i}(x) + T_{0i}(y))\,\partial^i \delta(\vec{x}-\vec{y})$$

indem wir die Argumente geeignet symmetrisieren und dann die Formel verwenden

$$[f(x)g(y) + f(y)g(x)]\,\partial_k \delta(\vec{x}-\vec{y}) = [f(x)g(x) + f(y)g(y)]\,\partial_k \delta(\vec{x}-\vec{y})$$

mit der man Produkte mit verschiedenen Argumenten zu Teilen von T_{oi} zusammenfassen kann. Die Rechnung ist im einzelnen sehr langwierig wegen der nichtlokalen Beiträge, die sich aber letztlich alle herauskürzen. Wir geben deshalb nur die Zwischenresultate an.

$$[T_{00}(x), T^M_{00}(y)] = \tfrac{1}{2}\Big(-\tfrac{1}{2}\{[T_{00}(x), F_{0k}(y)], F^{0k}(y)]\} + \tfrac{1}{4}\{[T_{00}(x), F_{ik}(y)], F^{ik}(y)\} - (x \leftrightarrow y)\Big)$$

$$= -\frac{i}{2}\Big(\tfrac{1}{2}\{F_{ik}(x), F^{0k}(y)\}\partial^i \delta(\vec{x}-\vec{y}) + \tfrac{1}{2}\{F_{0i}(x), F^{ik}(y)\}\,\partial_k \delta(\vec{x}-\vec{y}) - \dots$$

$$= -i\,(T^M_{0i}(x) + T^M_{0i}(y))\,\partial^i \delta(\vec{x}-\vec{y})$$

$$[T_{00}(x), T^W_{00}(y)] = \tfrac{i}{2}\Big(\tfrac{1}{2}\{[T_{00}(x), j^0(y)], A^0(y)\} + \tfrac{1}{2}\{j^0(y), [T_{00}(x), A^0(y)]\} - (x \leftrightarrow y)\Big)$$

$$= -\frac{i}{2}\Big(-\frac{e}{2}\big(\bar\psi \gamma^k A^0 \psi - \psi A^0 \bar\psi \gamma^k\big)(x)\,\partial_k \delta(\vec{x}-\vec{y}) - \tfrac{1}{2}\{j^0(y), j^k(x)\}\,\partial^k \mathcal{D}(\vec{x}-\vec{y})$$

$$-\frac{e}{2}\big(\bar\psi \gamma^k A^0 \psi - \psi A^0 \bar\psi \gamma^k\big)(y)\,\partial_k \delta(\vec{x}-\vec{y}) - \tfrac{1}{2}\{j^0(x), j^k(y)\}\,\partial^k \mathcal{D}(\vec{x}-\vec{y})$$

$$[T_{00}(x), T^D_{00}(y)] = \frac{i}{4}\Big([T_{00}(x), [\bar\psi(y), \gamma_0 \overleftrightarrow{\partial_0} \psi(y)]] - (x \leftrightarrow y)\Big)$$

$$= \Big[-i\partial_k \delta(\vec{x}-\vec{y})\Big\{2[\bar\psi(y), (\gamma^k \overleftrightarrow{\partial_0} + \gamma^0 \overleftrightarrow{\partial_k})\psi(y)] + \frac{ie}{2}\Big([\bar\psi(y), \gamma^0\{A^k(y), \psi(y)\}]$$

$$+ [\{\bar\psi(y), A^k(y)\}, \gamma^0 \psi(y)] + (x \leftrightarrow y)\Big\} +$$

$$+ e\,\partial^k \mathcal{D}(\vec{x}-\vec{y})\Big\{\{j_{5k}(x), [\bar\psi(y), \gamma^0 \psi(y)]\} + (x \leftrightarrow y)\Big\}\Big]$$

ie nichtlokalen Beiträge in T_{oo}^{W}, T_{oo}^{D} heben sich heraus und an findet die gewünschte Relation (zu beachten ist, daß auch ie Argumente in $\partial^k \delta(\vec{x}-\vec{y})$ vertauscht werden, so daß z.B. im erm $\{2[\bar{\varphi}\ldots\ \}$ bei T_{oo}^{D} das Plus-Zeichen stehen muß.)

Anhang 4

ir untersuchen den Ansatz (2.83) für die verallgemeinerten irac-Schwinger-Relationen. Zunächst folgt für alle Koeffizienten α, β, γ Symmetrie in μ, ν bzw. ρ, σ .Durch Umrehen des Kommutators folgt

$$[T_{\rho\sigma}(y), T_{\mu\nu}(x)] = -i\{-\alpha_{\mu\nu,\rho\sigma}(x)\delta(x-y) - \beta^{k}_{\mu\nu,\rho\sigma}(y)\partial_k\delta(\vec{x}-\vec{y}) - \gamma^{kl}_{\mu\nu,\rho\sigma}(y)\partial_k\partial_l\delta(\vec{x}-\vec{y})\}$$

bzw. nach Vertauschen von $\vec{x},\vec{y}$

$$[T_{\rho\sigma}(x), T_{\mu\nu}(y)] = -i\{-\alpha_{\mu\nu,\rho\sigma}(x)\delta(\vec{x}-\vec{y}) + \beta^{k}_{\mu\nu,\rho\sigma}(x)\partial_k\delta(\vec{x}-\vec{y}) - \gamma^{kl}_{\mu\nu,\rho\sigma}(x)\partial_k\partial_l\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

it Formel (2.95) transf. wir die Argumente auf $\vec{y}$

$$\beta^{k}_{\mu\nu,\rho\sigma}(x)\partial_k\delta(\vec{x}-\vec{y}) = \beta^{k}_{\mu\nu,\rho\sigma}(y)\partial_k\delta(\vec{x}-\vec{y}) - \partial_k\beta^{k}_{\mu\nu,\rho\sigma}(x)\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

$$\gamma^{kl}_{\mu\nu,\rho\sigma}(x)\partial_k\partial_l\delta(\vec{x}-\vec{y}) = \gamma^{kl}_{\ldots}(y)\partial_k\partial_l\delta(\vec{x}-\vec{y}) - \partial_k\gamma^{kl}_{\ldots}(y)\partial_l\delta(\vec{x}-\vec{y}) - \partial_l\gamma^{kl}_{\ldots}(y)\partial_k\delta(\vec{x}-\vec{y}) + \partial_k\partial_l\gamma^{kl}_{\ldots}(y)\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

ir erhalten dann durch Koeffizientenvergleich mit der urprünglichen Relation die Beziehungen

1) $\alpha_{\rho\sigma,\mu\nu}(x) = -(\alpha_{\mu\nu,\rho\sigma} + \partial_k\beta^{k}_{\mu\nu,\rho\sigma} + \partial_k\partial_l\gamma^{kl}_{\mu\nu,\rho\sigma})$

2) $\beta^{k}_{\rho\sigma,\mu\nu} = \beta^{k}_{\mu\nu,\rho\sigma} + 2\partial_l\gamma^{kl}_{\mu\nu,\rho\sigma}$

3) $\gamma^{kl}_{\rho\sigma,\mu\nu} = -\gamma^{kl}_{\mu\nu,\rho\sigma}$

Diese Bedingungen lassen sich weiter umformen. Aus Diff. von (2) folgt

$$\tfrac{1}{2}\left(\partial_k \beta^k{}_{\rho\sigma,\mu\nu} - \partial_k \beta^k{}_{\mu\nu,\rho\sigma}\right) = \partial_k \partial_\varepsilon \gamma^{k\varepsilon}_{\mu\nu,\rho\sigma}$$

und in (1) eingesetzt ergibt

$$(1)' \qquad \alpha_{\rho\sigma,\mu\nu} + \alpha_{\mu\nu,\rho\sigma} = -\tfrac{1}{2}\,\partial_k\left(\beta^k_{\mu\nu,\rho\sigma} + \beta^k_{\rho\sigma,\mu\nu}\right)$$

Aus der Antisymmetrie von $\partial_k \gamma^{k\varepsilon}_{\mu\nu,\rho\sigma}$ in $(\mu\nu),(\rho\sigma)$ in Gl. (2) folgt in (1), daß der Ausdruck

$$\left(\alpha_{\rho\sigma,\mu\nu} + \alpha_{\mu\nu,\rho\sigma}\right) + \partial_k \beta^k{}_{\mu\nu,\rho\sigma}$$

entweder antisymmetrisch in $(\mu\nu),(\rho\sigma)$ oder Null ist. Daraus folgt für $\alpha, \beta \neq 0$, daß auch $\partial_k \beta^k{}_{\mu\nu,\rho\sigma}$ symmterisch sein muß und damit gelten muß

$$\alpha_{\rho\sigma,\mu\nu} + \alpha_{\mu\nu,\rho\sigma} + \partial_k \beta^k_{\mu\nu,\rho\sigma} = 0$$

Wir erhalten damit das Gleichungssystem

$$\text{(A4.1)} \qquad \begin{aligned} &\text{(i)} && \alpha_{\rho\sigma,\mu\nu} + \alpha_{\mu\nu,\rho\sigma} = -\partial_k \beta^k_{\mu\nu,\rho\sigma} \\ &\text{(ii)} && \tfrac{1}{2}\left(\beta^k_{\rho\sigma,\mu\nu} - \beta^k_{\mu\nu,\rho\sigma}\right) = \partial_\varepsilon \gamma^{k\varepsilon}_{\mu\nu,\rho\sigma} \\ &\text{(iii)} && \gamma^{k\varepsilon}_{\mu\nu,\rho\sigma} = -\gamma^{k\varepsilon}_{\rho\sigma,\mu\nu} \end{aligned}$$

Aus (ii) und (iii) folgt weiter die Bedingung

$$\partial_k \partial_\varepsilon \gamma^{k\varepsilon}_{\mu\nu,\rho\sigma} = 0$$

Für die Kommutator-Relationen (2.82) zerlegen wir in $[T_{oi}, T_{\rho\sigma}]$ den Anteil $\sim \partial^k \delta(\vec{x}-\vec{y})$ in symmetrische und antisymmetrische Anteile betüglisch i,k .Zuvor bringen wir die Argumente alle auf die einheitliche Form in (2.99)

$$[T_{ok}(x), T_{oe}(y)] = i\left(T_{oe}(x)\,\vec{\partial}_k + T_{ok}(y)\,\vec{\partial}_e\right)\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

$$= -i\partial_k T_{oe}(x)\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) + i\left(T_{oe}(y)\,g_{ik} + T_{ok}(y)\,g_{ie}\right)\partial^k\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

analog

$$[T_{ok}(x), T_{me}] = -i\partial_k T_{me}\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) + i\left(T_{me}(y)\,g_{ki} - T_{mi}(y)\,g_{ke} - T_{ei}(y)\,g_{km}\right)\partial^k\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

Dann gilt

$$T_{oe}\,g_{ki} + T_{ok}\,g_{ie} = \tfrac{1}{2}\left(2T_{oe}\,g_{ki} + T_{ok}\,g_{ie} + T_{oi}\,g_{ke} + \right.$$

(A4.2)

$$\left. + \tfrac{1}{2}\left(T_{ok}\,g_{ie} - T_{oi}\,g_{ke}\right)\right.$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(2T_{oe}\,g_{ik} + T_{ok}\,g_{ie} + T_{oi}\,g_{ke}\right) - \tfrac{1}{2}\left(T_{oi}\,g_{ke} - T_{ok}\,g_{ie}\right)$$

mit

$$\left(\Sigma^2_{ki}\right)_{oe,}{}^{\lambda\tau}\,T_{\lambda\tau} = g^{\lambda 0}\left(g_{ke}\,g_i{}^{\tau} - g_k{}^{\tau}\,g_i{}^{e}\right)T_{\lambda\tau}$$

$$= g_{ke}\,T_{oi} - g_{ie}\,T_{ok}$$

folgt daher (2.1oo).Ebenso für $[T_{ok}, T_{me}]$:

$$T_{me}\,g_{ki} - T_{mi}\,g_{ke} - T_{ei}\,g_{km} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(2T_{me}\,g_{ik} - T_{mi}\,g_{ke} - T_{mk}\,g_{ie} - T_{ei}\,g_{km} - T_{ek}\,g_{im}\right) -$$

$$-\tfrac{1}{2}\left(T_{mi}\,g_{ke} - T_{mk}\,g_{ie} + T_{ei}\,g_{km} - T_{ek}\,g_{im}\right)$$

mit $\left(\Sigma^2_{ki}\right)_{me,}{}^{\lambda\tau}\,T_{\lambda\tau} = \left[g^{\lambda}{}_{m}\left(g_{ke}\,g_i{}^{\tau} - g_k{}^{\tau}\,g_{ie}\right) + g^{\tau}{}_{e}\left(g_{em}\,g_i{}^{\lambda} - g_k{}^{\lambda}\,g_{im}\right)\right]T_{\lambda\tau}$

$$= T_{mi}\,g_{ke} - T_{mk}\,g_{ie} + T_{ie}\,g_{km} - T_{ke}\,g_{im}$$

folgt wieder (2.1oo)

Anhang 5

Für die verallgemeinerte Dirac-Schwinger-Bedingungen finden wir in der QED explizit folgende Ergebnisse. Mit Hilfe von (2.1o4) und der expliziten Eich-Terme $E_\mu^\lambda(x,y)$

$$
\begin{aligned}
E_0^\lambda(x,y) = \frac{e}{2}\Big[&\big(\{A^0(x), \partial^\lambda \psi(x)\} + \{\partial_0 A^\lambda(x), \psi(x)\}\big)\delta(\vec{x}-\vec{y}) - \{F_{0k}(x), \partial^\lambda \psi(y)\}\partial^k \delta(\vec{x}-\vec{y}) \\
&+ g^{\lambda 0}\big(\{A_k(y), \psi(y)\}\partial^k\delta(\vec{x}-\vec{y}) + \{\psi(y), j^k(x)\}\partial^k\delta(\vec{x}-\vec{y})\big) \\
&+ g^{\lambda \ell}\big(-\{A^0(x), \psi(y)\}\partial_\ell \delta(\vec{x}-\vec{y}) - \{F_{0k}(x), \psi(y)\}(g^k_\ell\,\delta(\vec{x}-\vec{y}))^T \big)\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_i^\lambda(x,y) = \frac{e}{2}\Big[&\big(\{A_i(x), \partial^\lambda \psi(x)\} + \{\partial_i A^\lambda(x), \psi(x)\}\big)\delta(\vec{x}-\vec{y}) - \{F_{ik}(x), \partial^\lambda \psi(y)\}\partial^k \delta(\vec{x}-\vec{y}) \\
&+ g^{\lambda 0}\Big(\tfrac{1}{2}\big(\gamma^0\gamma_i\{A_k(y), \psi(y)\} + \gamma^0\gamma_k\{A_i(y), \psi(y)\}\big)\partial^k\delta(\vec{x}-\vec{y}) - \{j^0(x), \psi(y)\}\partial_i\delta(\vec{x}-\vec{y}) \\
&+ g^{\lambda \ell}\big(-\{A_i(y), \psi(y)\}\partial_\ell \delta(\vec{x}-\vec{y}) - \{F_{ik}(x), \psi(y)\}(g^k_\ell\,\delta(\vec{x}-\vec{y}))^T \big)\Big]
\end{aligned}
$$

finden wir für den Dirac-Teil in

$$
\begin{aligned}
[T_{0\mu}(x), T^D_{\lambda\tau}(y)] = \frac{i}{8}\Big\{ -\Big[&\Big(-i\partial_\mu \partial^\lambda \bar\psi\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) - \tfrac{i}{2}(1+g_{\mu 0})\partial_\tau \bar\psi(y)\big((\overleftarrow{\Sigma}^{3/2}_{\mu k})^{\tau\lambda} + g_\mu{}^i\,\overleftarrow{b}^{\tau\lambda}_{ik}\big)\partial^k\delta(\vec{x}-\vec{y}) \\
&+ \overleftarrow{c}^{k\ell}_{\mu,\tau}(y)\,\partial_k\partial_\ell\delta(\vec{x}-\vec{y}) + \overleftarrow{E}^\lambda_{\mu,\tau}(x,y)\Big), \gamma_\lambda \psi(y)\Big] \\
+ \Big[\bar\psi(y)\gamma_\lambda, &\Big(-i\partial_\mu\partial_\tau\psi(x)\delta(\vec{x}-\vec{y}) - \tfrac{i}{2}(1+g_{\mu 0})\big((\Sigma^{3/2}_{\mu k})^{\tau\lambda} + g_\mu{}^i\, b^{\tau\lambda}_{ik}\big)\partial_\lambda\psi(y)\partial^k\delta(\vec{x}-\vec{y}) \\
&+ c^{k\ell}_{\mu,\tau}(y)\,\partial_k\partial_\ell\delta(\vec{x}-\vec{y}) + E^\lambda_{\mu,\tau}\Big)\Big] - \\
- \Big[\partial_\tau\bar\psi(y)\gamma_\lambda, &\Big(-i\partial_\mu\psi\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) - \tfrac{i}{2}(1+g_{\mu 0})\big(\Sigma^{1/2}_{\mu k} - g_{\mu k}\big)\psi(y)\partial^k\delta(x-y) + E_\mu \\
+ \Big[\Big(-i\partial_\mu \bar\psi\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) &- \tfrac{i}{2}(1+g_{\mu 0})\bar\psi(y)\big(\overleftarrow{\Sigma}^{1/2}_{\mu k} - g_{\mu k}\big)\partial^k\delta(\vec{x}-\vec{y}) + \overleftarrow{E}_\mu(x,y)\Big), \gamma_\lambda\partial_\tau\psi(y) \\
&+ (\lambda \leftrightarrow \tau \text{ vertauscht})\Big\}
\end{aligned}
$$

Dabei hatten wir die Pfeil-Notation auch auf Eich-Terme übertragen (bei denen dann zusätzlich $e \to -e$ ersetzt wird)
Die b,c sind in (2.1o6) angegeben und E_μ ist der Eich-Term in (2.39) für den Kommutator $[T o_{\mu,1}, \psi]$

$$E_\mu(x,y) = \frac{e}{i}\left(\{A_\mu(x), \psi(x)\}\delta(\vec{x}-\vec{y}) - \{F_{\mu k}(x), \psi(y)\}\partial^k \delta(\vec{x}-\vec{y})\right.$$

Damit erhalten wir nun mit den Formeln

$$\overleftarrow{\Sigma}^{3/2}_{\mu k}{}^{\tau\sigma}\gamma_\lambda + \gamma_\lambda \overrightarrow{\Sigma}^{1/2}_{\mu k}\cdot g^{\tau\sigma} = g^{\tau\sigma}(g_{\mu\lambda}\gamma_k - g_{k\lambda}\gamma_\mu) + (g_\mu{}^\tau g_i{}^\sigma - g_\mu{}^\sigma g_k{}^\tau)\gamma_\lambda$$

$$\overleftarrow{b}_{ik}{}^{\tau\sigma}\gamma_\lambda + \gamma_\lambda g^{\tau\sigma}\overrightarrow{b}_{ik} = -\{g_{ik}g^{\tau\sigma}\gamma_\lambda + [g^{\tau o}(\gamma_i g^\sigma{}_k + \gamma_k g^\sigma{}_i)\gamma^o - (g^\tau{}_k g^\sigma{}_i + g^\tau{}_\sigma g^\sigma{}_k)]\gamma_\lambda$$

das Ergebnis

$$[T o_\mu(x), T^D_{\lambda\tau}(y)] = -i\partial_\mu T_{\lambda\tau}\delta(\vec{x}-\vec{y}) + \frac{i}{8}\Big[-\tfrac{i}{2}(1+g_{\mu o})\big[\bar\psi(y), 2\overleftrightarrow{\partial_\sigma}\big(g^{\tau\sigma}(g_{\mu\lambda}\gamma_k - g_{k\lambda}\gamma_\mu)$$
$$+ (g_\mu{}^\tau g_k{}^\sigma - g_u{}^\sigma g_k{}^\tau)\gamma_\lambda\big)\psi(y)\big] -$$
$$-\tfrac{i}{2}g_\mu{}^i\Big[\bar\psi(y), \big(\overleftarrow{\partial_\sigma}\big(\overleftarrow{b}_{ik}{}^{\tau\sigma}\gamma_\lambda - g^{\tau\sigma}g_{ik}\gamma_\lambda\big) + \big(\gamma_\lambda \overrightarrow{b}_{ik}{}^{\tau\sigma} - g^{\tau\sigma}g_{ik}\gamma_\lambda\big)\overrightarrow{\partial_\sigma}\big)\psi(y)\Big]$$
$$+ (\lambda \leftrightarrow \tau \text{ vert.})\Big]\partial^k\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

$$+\Big\{\tfrac{i}{8}\Big[\bar\psi(y), \big(-\overleftarrow{c}^{ke}_{\mu,\tau}\gamma_\lambda + \gamma_\lambda \overrightarrow{c}^{ke}_{\mu,\tau}\big)\psi(y)\Big]\partial_k\partial_e\delta(\vec{x}-\vec{y}) +$$
$$+\tfrac{i}{8}\Big[-\big[\overleftarrow{E}_{\mu,\tau}(x,y), \gamma_\lambda\psi(y)\big] + \big[\bar\psi(y), \gamma_\lambda \overrightarrow{E}_{\mu,\tau}(x,y)\big]$$
$$-\big[\partial_\tau\bar\psi(y)\gamma_\lambda, E_\mu(x,y)\big] + \big[\overleftarrow{E}_\mu, \gamma_\lambda\partial_\tau\psi(y)\big] + (\lambda\leftrightarrow\tau \text{ vert.})\Big\}$$

Für die lokalen Terme $\sim\partial^k\delta(\vec{x}-\vec{y})$ und $\sim\partial_k\partial_e\delta(\vec{x}-\vec{y})$ ergibt sich in der Bezeichnungsweise von (2.83)

$$= \Big[-\tfrac{i}{2}(1+g_{\mu o})(\Sigma^2_{\mu k})_{\lambda\tau}{}^{\rho\sigma}T^D_{\rho\sigma}(y) + \tfrac{i}{8}(-\tfrac{i}{2})g_\mu{}^i\Big[\bar\psi(y), \{-2\overleftrightarrow{\partial_\sigma}\gamma_\lambda(2g_{ik}g_\tau{}^\sigma +$$
$$+ g_{\tau k}g_i{}^\sigma + g_{\tau i}g^\sigma{}_k) + g_{\tau o}\big(\overleftarrow{\partial_\sigma}(\gamma_i g^\sigma{}_k + \gamma_k g^\sigma{}_i)\gamma^o\gamma_\lambda + \gamma_\lambda\gamma^o(\gamma_i g^\sigma{}_k + \gamma_k g^\sigma{}_i)\overrightarrow{\partial_\sigma}\big) + (\lambda\leftrightarrow\tau)\}\psi\Big]$$

bzw. $= \frac{i}{8}\delta^\sigma(y)\Big\{g_{\mu o}g_\tau{}^\ell\varepsilon^k{}_{o\lambda\sigma} + \frac{1}{2}g_\mu{}^i\big[g_{\tau o}\varepsilon_{oj\lambda\sigma}(g_i{}^\ell g^{jk} + g^j{}_i g^{k\ell}) + g_\tau{}^\ell\varepsilon_i{}^k{}_{\lambda\sigma}\big] + (\lambda\leftrightarrow\tau)\Big\}$

wobei wir wieder $[\gamma_\lambda,[\gamma_\mu,\gamma_\nu]] = -4i\,\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\gamma^5\gamma^\sigma$ benützten und damit alle γ-Anteile bei $\partial_\kappa\partial_\varepsilon\delta(x-y)$ durch j^σ ausdrücken konnten. Der symmetrische Anteil läßt sich dann so schreiben

$$\beta^k_{oi,\lambda\tau} + \beta^i_{ok,\lambda\tau} = -T_{\rho\sigma}^{\ \ D}(y)\Big[2g_{ik}g_\tau^{\ 5}g_\lambda^{\ \rho} + (g_i^{\ 5}(g_{\tau k}g_\lambda^{\ \rho} + g_{\lambda k}g_\tau^{\ \rho}) + (i\leftrightarrow k))\Big] +$$
$$+ \tfrac{i}{4}\Big[\bar\psi(y),\Big\{\gamma_\rho\overrightarrow{\partial_\sigma}(g_i^{\ \rho}(g_{\tau k}g_\lambda^{\ 5} + g_\tau^{\ 5}g_{\lambda k}) + (i\leftrightarrow k)) +$$
$$+ \tfrac{1}{2}\big(\gamma_i\gamma^0\gamma_\rho\overleftarrow{\partial_k} + \overrightarrow{\partial_k}\gamma_\rho\gamma^0\gamma_i + (i\leftrightarrow k)\big)(g_\lambda^{\ \rho}g_{\tau 0} + g_\tau^{\ \rho}g_{\lambda 0})\Big\}\psi(y)\Big]$$

woraus dann (2.111) folgt. Für die Eich-Terme erhalten wir nach etwas mühseliger Rechnung:

für $\mu = 0$

$$\frac{ie}{16}\Big\{\Big[\big(\{\partial_\tau\bar\psi, A^0\} + \{\bar\psi, \partial_\tau A^0\}\big)\delta(\vec x-\vec y) - \{\partial_\tau\bar\psi(y), Fok(x)\}\partial^k\mathfrak{D}(\vec x-\vec y) + g^{\tau 0}\big(\{\bar\psi(y), A_k(y)\}\partial^k\delta(\vec x-\vec y)$$
$$+ \{\bar\psi(y), j_k(x)\}\partial^k\mathfrak{D}(x-y) + g_\tau^{\ \ell}\big(-\{\bar\psi(y), A^0(y)\}\partial_\ell\delta(\vec x-\vec y) - \{\bar\psi(y), Fok(x)\}(g^k_{\ \ell}\delta(\vec x-\vec y))^T\big), \gamma_\lambda\psi($$
$$+ \Big[\bar\psi(y)\gamma_\lambda, \big(\{A_0, \partial_\tau\psi\} + \{\partial_\tau A^0, \psi\}\big)\delta(\vec x-\vec y) - \{Fok(x), \partial_\tau\psi(y)\}\partial^k\mathfrak{D}(\vec x-\vec y) + g^{\tau 0}\big(\{A_k(y), \psi(y)\}\partial^k\delta(\vec x-\vec y$$
$$+ \{\psi(y), j_k(x)\}\partial^k\mathfrak{D}(x-y)\big) + g_\tau^{\ \ell}\big(-\{A_0(y), \psi(y)\}\partial_\ell\delta(\vec x-\vec y) - \{Fok(x), \psi(y)\}(g^k_{\ \ell}\delta(\vec x-\vec y))^T\big)$$
$$- \Big[\partial_\tau\bar\psi(y)\gamma_\lambda, \big(\{A_0, \psi\}\delta(\vec x-\vec y) - \{Fok(x), \psi(y)\}\partial^k\mathfrak{D}(\vec x-\vec y)\big)\Big] -$$
$$- \Big[\big(\{\bar\psi, A^0\}\delta(x-y) - \{\bar\psi(y), Fok(x)\}\partial^k\mathfrak{D}(\vec x-\vec y)\big), \gamma_\lambda\partial_\tau\psi(y)\Big] + \quad \lambda\leftrightarrow\tau\Big\}$$

$$= \frac{i}{8}\Big\{-2\big(\{\partial_\tau A^0, j_\lambda\} + \{\partial_\lambda A^0, j_\tau\}\big)\delta(\vec x-\vec y) -$$
$$- 2\big\{\big(A_k(y)\partial^k\delta(\vec x-\vec y) + j_k(x)\partial^k\mathfrak{D}(\vec x-\vec y)\big), \big(g_{\tau 0}j_\lambda(y) + g_{\lambda 0}j_\tau(y)\big)\big\}$$
$$+ 2\big\{\big(A_0(y)\partial_\ell\delta(\vec x-\vec y) + Fok(x)(g^k_{\ \ell}\delta(\vec x-\vec y))^T\big), \big(g_\tau^{\ \ell}j_\lambda(y) + g_\lambda^{\ \ell}j_\tau(y)\big)\big\}$$
$$- 4e^2\delta^3(0)\Big(\Big[\big(g_\tau^{\ \ell}g_{\lambda 0} + g_{\tau 0}g_\lambda^{\ \ell}\big)\partial_k\partial_\ell\mathfrak{D}(\vec x-\vec y) + (g_{\tau 0}g_{\lambda k} + g_{\lambda 0}g_{\tau k})\delta(\vec x-\vec y)\Big]\partial^k\mathfrak{D}(\vec x-\vec y)$$
$$- (g_{\tau k}g_{\lambda 0} + g_{\tau 0}g_{\lambda k})\mathfrak{D}(0)\partial^k\delta(\vec x-\vec y)\Big)\Big\}$$

und analog für $\mu = i$

$$\frac{i}{8}\Big\{ -4\left(\partial_i A^3(x) j_\tau(x) + \partial_i A_\tau(x) j_\lambda(x)\right)\delta(\vec{x}-\vec{y}) +$$

$$+\Big[\left(-4 g_{\tau 0} g_{\lambda 0}\left(A_k(y) j_i(y) + A_i(y) j_k(y)\right) + 2\left(g_{\lambda 0} g_{\tau i} A_k(y) +\right.\right.$$

$$\left.\left. + g_{\lambda i} g_{\tau 0} A_k(y) + (i \leftrightarrow k)\right)\right)\partial^k \delta(\vec{x}-\vec{y}) + 2\left\{j^0(x), \left(j_\tau(y) g^{\tau 0} + j_\lambda(y) g^{\tau 0}\right)\right\}\partial_i \mathcal{D}(\vec{x}-\vec{y})\Big] +$$

$$+\Big[4 A_i(y)\left(g^{\lambda e} j_\tau(y) + g_\tau{}^e j_\lambda(y)\right)\partial_e \delta(\vec{x}-\vec{y}) + \left(g_\lambda{}^e j_\tau + g_\tau{}^e j_\lambda\right)(y)\, F_{ik}(x)\left(g^{ke}\delta(\vec{x}-\vec{y})\right)^T$$

$$\left. - 8 e^2 g_{\lambda 0} g_{\tau 0}\,\delta^3(0)\,\partial_i \mathcal{D}(\vec{x}-\vec{y})\,\delta(\vec{x}-\vec{y})\Big]\right\}$$

Für den WW-Term erhalten wir weiter

$$\left[T_{0\mu}(x), T^W_{\lambda\tau}(y)\right] = g_{\mu 0}\Big\{-\frac{i}{4}\left\{A_\lambda, \partial^0 j_\tau\right\}\delta(\vec{x}-\vec{y}) - \frac{i}{4}\left\{A_\lambda(x), \left(g_{\tau k} j_0(y) - g_{\tau 0} j_k(y)\right)\right\}\partial^k \delta(\vec{x}-\vec{y})$$

$$+\frac{i}{4}\Big[g_{\lambda 0}\left\{j_{ke}(x), j_\tau(y)\right\}\partial^k \mathcal{D}(\vec{x}-\vec{y}) - g_{\lambda i}\left\{F_{ie}(x), j_\tau(y)\right\}\left(g^{ie}\delta(\vec{x}-\vec{y})\right)^T\Big] + (\lambda \leftrightarrow \tau)\Big\} +$$

$$+ g_\mu{}^i\Big\{-\frac{i}{4}\left\{A_\lambda, \partial_i j_\tau\right\}\delta(\vec{x}-\vec{y}) + \frac{1}{2}\left\{A_\lambda(y), \left(2 g_{\tau k} j_\tau(y) + \left(g_{\tau k} j_i - g_{\tau i} j_k\right)\right)\right\}\partial^k \delta(\vec{x}-\vec{y})$$

$$+ g_{ik} g_{\lambda 0}\left\{j_0(x), j_\tau(y)\right\}\partial^k \mathcal{D}(\vec{x}-\vec{y}) + g_{\lambda k}\left\{F_{ie}(x), j_\tau(y)\right\}\left(g^{ke}\delta(x-y)\right)^T + (\lambda \leftrightarrow \tau)\Big\}$$

$$= -\frac{i}{4}\Big[\left\{A_\lambda(y), \left(\partial_\mu j_\tau\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) + \frac{1}{2}\left(2 g_{\mu k} j_\tau(y) + (1+g_{\mu 0})\left(g_{k\tau} j_\mu - g_{\mu\tau} j_k\right)\right)\partial^k \delta(\vec{x}-\vec{y})\right\}\right.$$

$$\left. + \left\{\left(g_{\lambda 0}\left(g_{\mu k} j_0(x) - g_{\mu 0} j_k(x)\right)\partial^k \mathcal{D}(\vec{x}-\vec{y}) + g_{\lambda k} F_{\mu e}(x)\left(g^{ke}\delta(\vec{x}-\vec{y})\right)^T, j_\tau(y)\right\} + (\lambda \leftrightarrow \tau)\Big]\right.$$

Für die lokalen Anteile von WW- und Eichtermen des Dirac-Teils finden wir die kanonische Struktur

$$
\begin{aligned}
&\left[T_{\mu 0}(x),\, T^{W}_{\lambda\tau}(y)\right] + (\text{Eichterme lokal}) = \\
&= -\tfrac{i}{4}\Big\{\Big[\partial_\mu\big(\{A_\lambda, j_\tau\} + \{A_\tau, j_\lambda\}\big) - g_{\mu 0}\big(\{F_{0\lambda}, j_\tau\} + \{F_{0\tau}, j_\lambda\}\big)\Big]\delta(\vec{x}-\vec{y}) \\
&\quad + \tfrac{1}{2}(1+g_{\mu 0})\,(\Sigma^{2}_{\mu k})_{\lambda\tau}\,{}^{\rho\sigma}\big(\{A_\rho, j_\sigma\} + \{A_\sigma, j_\rho\}\big)(y)\,\partial^{k}\delta(\vec{x}-\vec{y}) + \\
&\quad + g_\mu{}^{i}\Big[-g_{ik}\big(\{A_\lambda, j_\tau\} + \{A_\tau, j_\lambda\}\big) - \tfrac{1}{2}\big\{(g_{\tau i}A_k + g_{\tau k}A_i),\, j_\tau\big\} - \\
&\quad - \tfrac{1}{2}\big\{(g_{\tau i}A_k + g_{\tau k}A_i),\, j_0\big\} + g_{\lambda 0}g_{\tau 0}\big(\{A_k, j_i\} + \{A_i, j_k\}\big) - \\
&\quad - \tfrac{1}{2}g_{\lambda 0}\big\{(g_{\tau i}A_k + g_{\tau k}A_i),\, j_0\big\} - \tfrac{1}{2}g_{\tau 0}\big\{(g_{\lambda i}A_k + g_{\lambda k}A_i),\, j_0\big\}\Big]\partial^{k}\delta(\vec{x}-\vec{y})
\end{aligned}
$$

Die nichtlokalen Eich-Terme und WW-Terme bleiben nach geeigneter Entwicklung der Kommutatoren außer singulären "Coulomb-Termen" weg. Diese ergeben zusammen

$$
\begin{aligned}
C'(x,y) = -\tfrac{ie^2}{2}\,\delta^3(0)\Big\{ & g_{\mu 0}\Big[\big(g_\tau{}^{\ell}g_{\lambda 0} + g_{\tau 0}g_\lambda{}^{\ell}\big)\big(\partial^{k}\partial_\ell D(\vec{x}-\vec{y})\,\partial_k D(\vec{x}-\vec{y}) + \\
& + \partial_\ell D(\vec{x}-\vec{y})\,\delta(\vec{x}-\vec{y})\big) - D(0)\,\partial_\ell D(\vec{x}-\vec{y})\Big] \\
& + 2g_\mu{}^{i}g_{\lambda 0}g_{\tau 0}\,\partial_i D(\vec{x}-\vec{y})\,\delta(\vec{x}-\vec{y})\Big\}
\end{aligned}
$$

Anhang 6

Für die Maxwellanteile in $[T_{o\mu}, T^{M}_{\lambda\tau}]$ finden wir folgende Ergebnisse. Wir gehen aus von dem Kommutator

$$[T_{o\mu}(x), F_{\lambda\tau}(y)] = -i\partial_\mu F_{\lambda\tau}\delta(\vec{x}-\vec{y}) + \tfrac{1}{2}(1+g_{\mu o})\left((\Sigma^2_{\mu j})_{\lambda\tau,}{}^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}(y) + g_{\mu}{}^{i} B^{F}_{ij,\lambda\tau}(y)\right)\partial^{j}\delta(x-y)$$

mit

$$B^{F}_{ij,\lambda\tau} = \begin{cases} [g_{ki}F_{oj} + g_{kj}F_{oi} - 2g_{ij}F_{ok}] & \lambda = o;\ \tau = k \\ [(F_{il}g_{kj} + F_{jl}g_{ki}) - (l \leftrightarrow k)] & \lambda = l;\ \tau = k \end{cases}$$

Daraus erhält man für T_{oo}

$$[T_{oo}(x), T^{M}_{\lambda\tau}(y)] = -i\partial_o T^{M}_{\lambda\tau}(x)\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) - i(\Sigma^2_{ok})_{\lambda\tau,}{}^{\rho\sigma} T^{M}_{\rho\sigma}(y)\,\partial^{k}\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

die erwünschte kanonische Struktur. Für T_{oi} erhalten wir wieder allgemein

$$[T_{oi}(x), T^{M}_{\lambda\tau}(y)] = -i\partial_i T^{M}_{\lambda\tau}\delta(\vec{x}-\vec{y}) - \tfrac{i}{2}\left((\Sigma^2_{ik})_{\lambda\tau,}{}^{\rho\sigma} T_{\rho\sigma}(y) + B^{M}_{ik,\lambda\tau}(y)\right)\partial^{k}\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

mit folgendem Ergebnis für die $B^{M}_{ik,}$

$$B^{M}_{ik,o\sigma} = -2g_{ik}T_{o\sigma} + 2g_{\sigma o}T_{ik} - g_{ok}T_{oi} - g_{oi}T_{ok}$$

$$B^{M}_{ik,ml} = \tfrac{1}{4}g_{ml}\{B^{F}_{ik,\lambda\tau}, F_{\lambda\tau}\} + \tfrac{1}{2}\left(\{B^{F}_{ik,m\lambda}, F^{\lambda}_{\ l}\} + \{F_{m\lambda}, B^{F}_{ik,\ l}{}^{\lambda}\}\right)$$

welche daher wie verlangt in i,k symmetrisch sind ($B^{M}_{ik,ml}$ läßt sich aber nicht mehr durch $T^{M}_{\lambda\tau}$ ausdrücken). Für die Spur dieses Ausdruckes erhalten wir im Gegensatz zum Dirac-Teil des ET. diesmal das kanonische Resultat (mit $B^{Fk}{}_{k,\lambda\tau} = -4F_{\lambda\tau}$)

$$B^{Mk}{}_{k,\lambda\tau} = -2\cdot 4\,T^{M}_{\lambda\tau}$$

Anhang 7

Der Referenz /16/ entnehmen wir folgende Definitionen:
Photon-Greenfunktion in Strahlungseichung

$$D_R^{\lambda\tau}(x-y) = \mathbb{T}_T^{\lambda\tau} \cdot D_c + n^\lambda n^\tau \mathcal{D}(x-y) \; ; \quad \Box D_c(x-y) = \delta^4(x-y)$$

(A7.1)

$$\mathbb{T}_T^{\lambda\tau}(k,n) = g^{\lambda\tau} - n^\lambda n^\tau + (k^\lambda - (nk)n^\lambda)(k^\tau - (nk)n^\tau)\,\mathcal{D}(k)$$

Coulomb-Greenfunktion auf der Hyperfläche n x = o, n^2 o

$$\left(\Box - (n\partial)^2\right)\mathcal{D}(x-y) = \delta^4(x-y)$$

(A7.2)

Dann gelten folgende Formeln

$$\mathbb{T}_T{}^\lambda{}_\lambda = 2 \; ; \quad \partial_\lambda \mathbb{T}_T^{\lambda\tau} = 0 \; ; \quad \partial_\mu D_R^{\mu\nu} = n^\nu (n\partial)\mathcal{D}$$

(A7.2)

$$\Box D_R^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\delta^4(x-y) - (\partial^\mu\partial^\nu - (n^\mu\partial^\nu + n^\nu\partial^\mu)(n\partial))\mathcal{D}$$

Dirac-Greenfunktion G

$$(i\vec{\partial}(x) - e\not{A}(x) - m)G(x,y|A) = \delta^4(x-y) = G(x,y|A)\left(i\overleftarrow{\partial}(y) - e\not{A}(y) - m\right)$$

(A7.3)

Für die Ableitung von (3.8),(3.9),(3.10) bilden wir den Vakuumerwartungswert von (3.8)

$$\begin{aligned}
{}_{\omega,\alpha}\langle o|T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}|o\rangle_{\omega,\alpha} = {} & e^{-i\frac{\delta}{\delta A}\cdot\frac{\delta}{\delta J}}\Big\{\left(J_\mu - \tfrac{1}{i}\tfrac{\delta}{\delta A^\mu}\right)\tfrac{1}{i}\tfrac{\delta}{\delta J^\nu} - \left(J_\nu - \tfrac{1}{i}\tfrac{\delta}{\delta A^\nu}\right)\tfrac{1}{i}\tfrac{\delta}{\delta J^\mu} \\
& - \left(A_\nu - \tfrac{1}{i}\tfrac{\delta}{\delta J^\nu}\right)\tfrac{1}{i}\tfrac{\delta}{\delta A^\mu} + \left(A_\mu - \tfrac{1}{i}\tfrac{\delta}{\delta J^\mu}\right)\tfrac{1}{i}\tfrac{\delta}{\delta A^\nu} + \\
& + \tfrac{1}{4}\left(\bar{q}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\tfrac{1}{i}\tfrac{\delta}{\delta\bar{q}} + \tfrac{1}{i}q[\gamma_\mu,\gamma_\nu]i\tfrac{\delta}{\delta q}\right)\Big\} e^{-i\bar{q}\cdot G\cdot q - F[A] - \frac{i}{2}J\cdot D_R\cdot J} \\
= {} & e^{-i\frac{\delta}{\delta A}\cdot\frac{\delta}{\delta J}}\Big\{\left[-J_\mu(D_R\cdot J)_\nu - A_\nu\left(ie\,Sp[\gamma_\mu G(x,x|A)] - e(\bar{q}\cdot G\cdot q)\right)\right] - [\mu\rightleftarrows\nu] \\
& - \tfrac{1}{4}\bar{q}[\gamma_\mu,\gamma_\nu](G\cdot q) + \tfrac{1}{4}(\bar{q}\cdot G)[\gamma_\mu,\gamma_\nu]q\Big\} e^{-i[\dots]}
\end{aligned}$$

(A7.4)

Der Erhaltungssatz ergibt

$$\begin{aligned}
{}_{\omega,\alpha}\langle o|\partial^\mu T_{\mu\nu}|o\rangle_{\omega,\alpha} = {} & e^{-i\frac{\delta}{\delta A}\cdot\frac{\delta}{\delta J}}\Big\{-\partial_\lambda\left(J_\lambda - \tfrac{1}{i}\tfrac{\delta}{\delta A^\lambda}\right)\tfrac{1}{i}\tfrac{\delta}{\delta J_\lambda} - \\
& - \partial_\nu\left(A^\lambda - \tfrac{1}{i}\tfrac{\delta}{\delta J_\lambda}\right)\tfrac{1}{i}\tfrac{\delta}{\delta A_\lambda} - \left(\partial_\nu\bar{q}\cdot\tfrac{1}{i}\tfrac{\delta}{\delta\bar{q}} + \partial_\nu q\,\tfrac{1}{i}\tfrac{\delta}{\delta q}\right)\Big\} e^{-i[\dots]} \\
= {} & e^{-i\frac{\delta}{\delta A}\cdot\frac{\delta}{\delta J}}\Big\{\partial_\nu(x)\Big[-(D_R\cdot J)^\lambda\left(ie\,Sp[\gamma_\lambda G(x,x|A)] - e(\bar{q}\cdot G)\gamma_\lambda(G\cdot q)\right)\Big] - \\
& - \partial_\nu A^\lambda\left(ie\,Sp[\gamma_\lambda G(x,x|A)] - e(\bar{q}\cdot G)\gamma_\lambda(G\cdot q)\right) + \partial_\nu J^\lambda(D_R\cdot J)_\lambda \\
& + \left(\partial_\nu\bar{q}(G\cdot q) + (\bar{q}\cdot G)\partial_\nu q\right)\Big\}\cdot e^{-i[\dots]}
\end{aligned}$$

(A7.5)

sowie analog die Spur-Identität

$$ {}_{w,Q}\langle 0|T j_\mu|0\rangle_{w,a} = e^{-i\frac{\delta}{\delta A}\cdot\frac{\delta}{\delta J}}\Big\{-iSp\big[(e\not{A}+m)G(xx|A)\big] + $$

$$ + 3(D_R\cdot J)_\lambda J^\lambda + \tfrac{5}{2}\big((\bar q\cdot G)q + \bar q(G\cdot q)\big) + 4\big(-ie\,Sp[\gamma_\lambda G(xx|A)] + $$

$$ + e(\bar q\cdot G)\gamma_\lambda(G\cdot q)\big)(D_R\cdot J)^\lambda - 5e^2\mathcal{D}(0)\delta^3(0)\Big\}e^{-i[\dots]} = \not{\Delta} \qquad \text{(A7.6)} $$

Wir untersuchen nun die Wirkung der Operator-Identitäten auf die rechte Seite von (3.11)

Für die Symmetrie betrachten wir direkt den Anteil mit $\varepsilon_{\mu\rho\sigma}\dots$

$$ \tfrac{1}{2}\varepsilon_{\mu\rho\sigma\tau}\partial^\rho(x)\big(-iSp[\gamma^5\gamma^\sigma G(xx|A)] + (\bar q\cdot G)\gamma^5\gamma^\sigma(G\cdot q)\big) $$

$$ = \tfrac{i}{8}\partial^\rho(x)\big(-iSp[\{\gamma_\rho,[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\}G(xx|A)] + (\bar q\cdot G)[\gamma_\rho,[\gamma_\mu,\gamma_\nu]](G\cdot q)\big) $$

mit $\{\gamma_\rho,[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\} = 2[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\gamma_\rho - 4\gamma_\mu g_{\nu\rho} + 4\gamma_\nu g_{\mu\rho}$ etc.
folgt dann mit Einsetzen der Feldgleichungen

$$ \not{\Delta} = \tfrac{i}{8}\Big\{-iSp\big[(2[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\overrightarrow{\not\partial} - 4\gamma_\mu\overrightarrow{\partial}_\nu + 4\gamma_\nu\overrightarrow{\partial}_\mu)G(xx|A)\big] - $$

$$ - iSp\big[G(xx|A)\big(-2\overleftarrow{\not\partial}[\gamma_\mu,\gamma_\nu] - 4\gamma_\mu\overleftarrow{\partial}_\nu + 4\gamma_\nu\overleftarrow{\partial}_\mu\big)\big]\Big\} $$

$$ + (\bar q\cdot G)\big(-2\overleftarrow{\not\partial}[\gamma_\mu,\gamma_\nu] + 2[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\overrightarrow{\not\partial} + 4(-\gamma_\mu\overleftarrow{\partial}_\nu - \gamma_\mu\overrightarrow{\partial}_\nu + \gamma_\nu\overleftarrow{\partial}_\mu + \gamma_\nu\overrightarrow{\partial}_\mu)\big)(G\cdot q)\Big\} $$

$$ = \tfrac{i}{2}\partial_\nu(\varepsilon)\big(-iSp[\gamma_\mu G(x-x_+|A)]\big) - \tfrac{i}{2}\partial_\mu(\varepsilon)\big(-iSp[\gamma_\nu G(x-x_+|A)]\big) - $$

$$ - i(\bar q\cdot G)\big(\gamma_\mu\overleftarrow{\partial}_\nu - \gamma_\nu\overleftarrow{\partial}_\mu\big)(G\cdot q) - \tfrac{1}{4}\big(\bar q[\gamma_\mu,\gamma_\nu](G\cdot q) - (\bar q\cdot G)[\gamma_\mu,\gamma_\nu]q\big) $$

$$ + e(\bar q\cdot G)(\gamma_\mu A_\nu - \gamma_\nu A_\mu)(G\cdot q) - ie\,Sp\big[(\gamma_\mu A_\nu - \gamma_\nu A_\mu)G(xx|A)\big] $$

Zusammen mit den Photon-Anteilen folgt daher

$$ \langle T_{\mu\nu}\rangle - \langle T_{\nu\mu}\rangle = e^{-i\frac{\delta}{\delta A}\cdot\frac{\delta}{\delta J}}\Big\{-ie\,Sp\big[(\gamma_\mu A_\nu - \gamma_\nu A_\mu)G(xx|A)\big] + $$

$$ + e(\bar q\cdot G)(\gamma_\mu A_\nu - \gamma_\nu A_\mu)(G\cdot q) - \tfrac{1}{4}\big(\bar q[\gamma_\mu,\gamma_\nu](G\cdot q) - (\bar q\cdot G)[\gamma_\mu,\gamma_\nu]q\big) \qquad \text{(A7.7)} $$

$$ + \partial^\lambda\big(\partial_\mu(D_R\cdot J)_\lambda - \partial_\lambda(D_R\cdot J)_\mu\big)(D_R\cdot J)_\nu + i(\partial_\mu\partial_\lambda D_R^\lambda{}_\nu(0) - \partial_\nu\partial_\lambda D_R^\lambda{}_\mu(0)) $$

$$ - \partial^\lambda\big(\partial_\nu(D_R\cdot J)_\lambda - \partial_\lambda(D_R\cdot J)_\nu\big)(D_R\cdot J)_\mu\Big\}e^{-i[\dots]} $$

sowie unter Verwendung von (A7.2) für die Photon-Anteile

$$\langle T_{\mu\nu}\rangle - \langle T_{\nu\mu}\rangle = e^{-i\frac{\delta}{\delta A}\cdot\frac{\delta}{\delta J}}\Big\{-ie\,Sp\big[(\gamma_\mu A_\nu - \gamma_\nu A_\mu)G(xx|A)\big] + e(\bar q\cdot G)(\gamma_\mu A_\nu - \gamma_\nu A_\mu)(G\cdot q)$$

(A7.9)
$$-\tfrac{1}{4}\big(\bar q[\gamma_\mu,\gamma_\nu](G\cdot q) - (\bar q\cdot G)[\gamma_\mu,\gamma_\nu]q\big) - J_\mu(D_R\cdot J)_\nu + J_\nu(D_R\cdot J)_\mu$$
$$+\big(\partial_\mu - n_\mu(n\partial)\big)\big(\tfrac{1}{\Box}\partial J\big)\cdot(D_R\cdot J)_\nu - (\partial_\nu - n_\nu(n\partial))\big(\tfrac{1}{\Box}\partial J\big)(D_R\cdot J)_\mu\Big\}e^{-i[\dots]}$$

(für den singulären Teil $\partial_\mu\partial_\lambda D^\lambda_{R\nu}(0)$ etc. siehe Bemerkung nach (3.12)

Für den ERhaltungssatz folgt analog

$$\partial^\nu\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle = e^{-i\frac{\delta}{\delta J}\cdot\frac{\delta}{\delta A}}\Big\{-\tfrac{1}{2}\partial_\nu(\varepsilon)\Big(-Sp\big[i\overrightarrow{\not\partial}G(xx_1A) - iG(xx_1A)\overleftarrow{\not\partial}\big] -$$
$$-i(\bar q\cdot G)\big(i\overrightarrow{\not\partial} - i\overleftarrow{\not\partial}\big)(G\cdot q)\Big) + \tfrac{1}{2}\partial_\nu(\bar q(G\cdot q) + (\bar q\cdot G)q) + e\partial_\nu(x)\Big((D_R\cdot J)^\rho\times$$
$$\times\big(-i\,Sp[\gamma_\rho G(xx|A)] + (\bar q\cdot G)\gamma_\rho(G\cdot q)\big)\Big) + \tfrac{1}{2}\partial_\nu\big(\partial_\lambda(D_R\cdot J)_\mu - \partial_\mu(D_R\cdot J)_\lambda\big)\times$$
$$\times\big(\partial^\lambda(D_R\cdot J)^\rho - \partial^\rho(D_R\cdot J)^\lambda\big) - \partial^\rho\partial_\nu(D_R\cdot J)_\lambda\big(\partial_\mu(D_R\cdot J)^\lambda - \partial^\lambda(D_R\cdot J)_\mu\big)$$
$$-\partial_\nu(D_R\cdot J)^\lambda\partial^\rho\big(\partial_\mu(D_R\cdot J)_\lambda - \partial_\lambda(D_R\cdot J)_\mu\big) + \partial_\nu\big(J_\lambda(D_R\cdot J)^\lambda\big)\Big\}e^{-i[\dots]}$$
$$= e^{-i\dots}\Big\{-Sp\big[\tfrac{i}{2}\overrightarrow{\partial_\nu}\big((e\not A+m)G\big) + \tfrac{i}{2}\big((e\not A+m)G\big)\overleftarrow{\partial_\nu} - \tfrac{i}{2}\overrightarrow{\partial_\nu}\big(G(e\not A+m)\big] - \tfrac{i}{2}\big(G(e\not A+m)\big)\overleftarrow{\partial_\nu}\big]$$
$$-i\Big(-(\bar q\cdot G)(e\not A+m)i\overleftrightarrow{\partial_\nu}(G\cdot q) + (\bar q\cdot G)i\overleftrightarrow{\partial_\nu}(e\not A+m)(G\cdot q) - \bar q\overleftrightarrow{\partial_\nu}(G\cdot q) + (\bar q\cdot G)\overleftrightarrow{\partial_\nu}q\Big)+$$
$$+\tfrac{1}{2}\partial_\nu\big(\bar q(G\cdot q) + (\bar q\cdot G)q\big) + e\partial_\nu\Big((D_R\cdot J)^\rho\big(-i\,Sp[\gamma_\rho G(xx|A)] + (\bar q\cdot G)\gamma_\rho(G\cdot q)\big)+$$
$$+\partial_\nu J_\lambda(D_R\cdot J)^\lambda + \partial_\nu(D_R\cdot J)^\lambda\big(\partial_\lambda - n_\lambda(n\partial)\big)\big(\tfrac{1}{\Box}\partial J\big)\Big\}e^{-i[\dots]}$$

Dabei hatten wir nach (A7.2) verwendet

$$\partial_\nu\big(J_\lambda(D_R\cdot J)^\lambda\big) - \partial_\nu(D_R\cdot J)^\lambda\partial^\rho\big(\partial_\mu(D_R\cdot J)_\lambda - \partial_\lambda(D_R\cdot J)_\mu\big) = \partial_\nu J_\lambda(D_R\cdot J)^\lambda + \partial_\nu(D_R\cdot J)^\lambda\times$$
$$\times\big(\partial_\lambda - n_\lambda(n\partial)\big)\big(\tfrac{1}{\Box}\partial\partial^\rho J_\mu\big)$$

und erhalten somit

$$\partial^\nu\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle_{u,a} = e^{-i\frac{\delta}{\delta A}\cdot\frac{\delta}{\delta J}}\Big\{-ie\,Sp\big[\partial_\nu\not A G(xx|A)\big] + e(\bar q\cdot G)\partial_\nu\not A(G\cdot q) +$$

(7.10)
$$+\partial_\nu\bar q(G\cdot q) + (\bar q\cdot G)\partial_\nu q + e\partial_\nu\Big((D_R\cdot J)^\rho\big(-i\,Sp[\gamma_\rho G(xx|A)] +$$
$$+(\bar q\cdot G)\gamma_\rho(G\cdot q)\big)\Big) + \partial_\nu J_\lambda(D_R\cdot J)^\lambda + \partial_\nu(D_R\cdot J)^\lambda\big(\partial_\lambda - n_\lambda(n\partial)\big)\big(\tfrac{1}{\Box}\partial J\big)\Big\}e^{-i[\dots]}$$

Für die Spur-Identität folgt mit analoger Rechnung

$$g^{\mu\nu}\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle = e^{-\frac{\delta}{\delta A}\cdot\frac{\delta}{\delta J}}\Big\{-i\,Sp\big[(e\not{A}+m)\,G(x,x|A)\big] + (\bar{q}\cdot G)(e\not{A}+m)(G\cdot q)$$

(A7.11)
$$+\tfrac{5}{2}\big(\bar{q}(G\cdot q)+(q\cdot G)\bar{q}\big)+3\,(D_R\cdot J)^4 J_4 + 4\Big(-ie\,Sp\big[\gamma_\lambda G(x,x|A)\big]+$$
$$+\,e\,(\bar{q}\cdot G)\gamma_\lambda(G\cdot q)\Big)(D_R\cdot J)^2 + 24\,i\,\delta^4(0) + 4i\,(n\partial)^2\delta(0) +$$
$$+\,(\partial_\mu - n_\mu(n\partial))(\overleftarrow{\partial}\cdot\partial J)\cdot(D_R\cdot J)^\mu\Big\}\,e^{-i[\dots]}$$

Anhang 8

Für den Erhaltungssatz (3.22) benötigen wir

$$\partial^\mu\tilde{j}_\mu(x;\varepsilon) = -\tfrac{e}{2}\partial^{(x)}\big[\bar{\psi}(x_+)\gamma_\mu\psi(x_-)\big]\phi(x_+,x_-) + \tilde{j}_\mu(x;\varepsilon)\,\partial^{(x)}\Big[-ie\int_{x_-}^{x_+}d\xi^\sigma A_\sigma(\xi)\Big]$$

$$= \tfrac{ie}{2}\Big(-\big[\bar{\psi}(e\not{A}(x_+)+m)\gamma_\mu\psi(x_-)\big]+\big[\bar{\psi}(x_+)\gamma_\mu(e\not{A}(x_-)+m)\psi(x_-)\big]\Big)+$$

(A8.1)
$$+\,\tilde{j}_\mu(x;\varepsilon)\,\partial^{(x)}\Big[-ie\int_{x_-}^{x_+}d\xi^\sigma A_\sigma(\xi)\Big]$$

$$= ie\,\tilde{j}_\mu(x;\varepsilon)\Big\{\big(A^\sigma(x_+)-A^\sigma(x_-)\big)-\partial^\sigma\int_{x_-}^{x_+}d\xi^\sigma A_\sigma(\xi)\Big\}$$

$$= ie\,\tilde{j}_\mu(x;\varepsilon)\int_{x_-}^{x_+}d\xi^\sigma F_{\sigma\sigma}(\xi)$$

und damit folgt (3.23).

Für die Symmetrie-Relation folgt analog zu (1.46)

$$\tfrac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\partial^{(x)}\tilde{j}^\sigma_5(x;\varepsilon) = \tfrac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\tilde{j}^\sigma_5(x;\varepsilon)\Big(-ie\,\partial^{(x)}\int_{x_-}^{x_+}d\xi^\sigma A_\sigma(\xi)\Big)+$$

$$+\,\phi(x_+,x_-)\Big\{\tfrac{i}{4}\big[\bar{\psi}(x_+),(\gamma_\nu\overrightarrow{\partial_\mu}-\gamma_\mu\overleftarrow{\partial_\nu})\psi(x_-)\big]-\tfrac{e}{16}\big[\bar{\psi}(x_+),(\not{A}(x_+)[\gamma_\mu\gamma_\nu]-[\gamma_\mu\gamma_\nu]\not{A}(x_-))\psi(x_-)\big]\Big\}$$

$$= \tfrac{i}{4e}\Big(-\partial_\nu(\varepsilon)\tilde{j}_\mu+\partial_\mu(\varepsilon)\tilde{j}_\nu\Big)+\tfrac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\tilde{j}^\sigma_5(x;\varepsilon)\Big(-ie\,\partial^{(x)}\int_{x_-}^{x_+}d\xi^\sigma A_\sigma(\xi)\Big)+$$

$$+\,\tfrac{i}{4e}\Big(\tilde{j}_\mu(x;\varepsilon)\,\overrightarrow{\partial_\nu}(\varepsilon)-\tilde{j}_\nu(x;\varepsilon)\,\overrightarrow{\partial_\mu}(\varepsilon)\Big)\Big(-ie\int_{x_-}^{x_+}d\xi^\sigma A_\sigma(\xi)\Big)-$$

$$-\,\tfrac{e}{16}\big[\bar{\psi}(x_+),(\not{A}(x_+)[\gamma_\mu\gamma_\nu]-[\gamma_\mu\gamma_\nu]\not{A}(x_-))\psi(x_-)\big]\phi(x_+,x_-)$$

Für den antisymmetrischen Teil von $\tilde{T}^D_{\mu\nu}$ erhalten wir damit

$$\tilde{T}^D_{\mu\nu}(x;\varepsilon)-\tilde{T}^D_{\nu\mu}(x;\varepsilon) = -\tfrac{ie}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\tilde{j}^\sigma_5(x;\varepsilon)\int_{x_-}^{x_+}d\xi^\sigma\partial^\sigma A_\sigma(\xi)+$$

$$+\,\tfrac{1}{2}\Big(\tilde{j}_\mu(x;\varepsilon)\,\overrightarrow{\partial_\nu}(\varepsilon)-\tilde{j}_\nu(x;\varepsilon)\,\overrightarrow{\partial_\mu}(\varepsilon)\Big)\int_{x_-}^{x_+}d\xi^\sigma A_\sigma(\xi)$$

$$-\,\tfrac{e}{8}\big[\bar{\psi}(x_+),(\not{A}(x_+)[\gamma_\mu\gamma_\nu]-[\gamma_\mu\gamma_\nu]\not{A}(x_-))\psi(x_-)\big]\phi(x_+,x_-)$$

Mit der Dirac-Algebra

$$\not{A}[\gamma_\mu,\gamma_\nu] = \tfrac{1}{2}A^\rho\left(\{\gamma_\rho,[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\}+[\gamma_\rho,[\gamma_\mu,\gamma_\nu]]\right) = \tfrac{1}{2}A^\rho\left(\{\gamma_\rho,[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\}+4g_{\mu\rho}\gamma_\nu-4g_{\nu\rho}\gamma_\mu\right)$$

$$[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\not{A} = \tfrac{1}{2}A^\rho\left(\{\gamma_\rho,[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\}+[[\gamma_\mu,\gamma_\nu],\gamma_\rho]\right) = \tfrac{1}{2}A^\rho\left(\{\gamma_\rho,[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\}-4g_{\mu\rho}\gamma_\nu+4g_{\nu\rho}\gamma_\mu\right)$$

folgt für den letzten Term

$$-\frac{e}{8}\left[\bar\psi(x_+),\left(\not{A}(x_+)[\gamma_\mu,\gamma_\nu]-[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\not{A}(x_-)\right)\psi(x_-)\right]$$

$$=-\frac{e}{8}\left[\bar\psi(x_+),\left(\tfrac{1}{2}\{\gamma_\rho,[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\}(A^\rho(x_+)-A^\rho(x_-))+2(g_{\mu\rho}\gamma_\nu-g_{\nu\rho}\gamma_\mu)(A^\rho(x_+)+A^\rho(x_-))\right)\psi(x_-)\right]$$

$$=\frac{ie}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}[\bar\psi(x_+),\gamma^5\gamma^\sigma\psi(x_-)]\int_{x_-}^{x_+}d\xi^\sigma\partial_\sigma A^\rho(\xi)-\frac{e}{4}[\bar\psi(x_+),(g_{\mu\rho}\gamma_\nu-g_{\nu\rho}\gamma_\mu)\psi(x_-)](A^\rho(x_+)+A^\rho(x_-))$$

und damit insgesamt

$$\begin{aligned}\tilde T^D_{\mu\nu}(x;\varepsilon)-\tilde T_{\nu\mu}(x;\varepsilon) &= \\ &= \frac{ie}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\tilde j^\sigma_5(x;\varepsilon)\int_{x_-}^{x_+}d\xi^\sigma F_\sigma{}^\rho(\xi)+ \\ &+\tfrac{1}{2}\left(\tilde j_\mu(x;\varepsilon)g_{\nu\rho}-\tilde j_\nu(x;\varepsilon)g_{\mu\rho}\right)\left(\partial^\rho(\varepsilon)\int_{x_-}^{x_+}d\xi^\sigma A_\sigma(\xi)-(A^\rho(x_+)+A^\rho(x_-))\right)\end{aligned}\tag{A8.2}$$

Wir können den letzten Klammerausdruck explizit eichinvariant schreiben. Dazu entwickeln wir die Integrale aus. Für geraden Integrationsweg gilt nämlich

$$\begin{aligned}\int_{x_-}^{x_+}d\xi^\sigma A_\sigma(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\partial_{\alpha_1}\cdots\partial_{\alpha_n}A_\sigma(x)\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}d\xi^\sigma\xi^{\alpha_1}\cdots\xi^{\alpha_n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\varepsilon\partial(x)\right)^n A_\sigma(x)\int_{-1}^{+1}d\lambda\,\lambda^n\varepsilon^\sigma \\ &= 2\varepsilon^\sigma\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\left(\varepsilon^\alpha\partial_\alpha(x)\right)^{2n}A_\sigma(x)\end{aligned}$$

und damit weiter

$$\partial^\rho(\varepsilon)\int_{x_-}^{x_+}d\xi^\sigma A_\sigma(\xi) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\left[\left(\varepsilon^\alpha\partial_\alpha\right)^{2n}A^\rho(x)+2n\varepsilon^\sigma\left(\varepsilon\partial_\alpha\right)^{2n-1}\partial^\rho A_\sigma(x)\right]$$

Wir erhalten daher zusammengefasst folgende Reihenentwicklung

$$\partial^\rho(\varepsilon)\int_{x_-}^{x_+} d\xi^\sigma A_{\sigma\rho}(\xi) - \left(A^\rho(x_+) + A^\rho(x_-)\right) =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\varepsilon^\alpha\partial_\alpha\right)^{2n} A^\rho(x) + 2n\,\varepsilon^\sigma\left(\varepsilon^\alpha\partial_\alpha\right)^{2n-1}\partial^\rho A_{\sigma\rho}(x)\right\}\frac{1}{(2n+1)!} - \frac{\left(\varepsilon^\alpha\partial_\alpha\right)^{2n} A^\rho(x)}{(2n)!}\Bigg\}$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\left\{2n\,\varepsilon^\sigma\left(\varepsilon^\alpha\partial_\alpha\right)^{2n-1}\partial^\rho A_{\sigma\rho}(x) - 2n\left(\varepsilon^\alpha\partial_\alpha\right)^{2n} A^\rho(x)\right\}$$

$$= 2\varepsilon^\sigma\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(2n+1)!}\left(\varepsilon^\alpha\partial_\alpha\right)^{2n-1} F^\rho{}_\sigma(x)$$

und damit für die Symmetrie-Relation das endgültige Resultat

$$\tilde{T}^\rho_{\mu\nu}(x;\varepsilon) - \tilde{T}^\rho_{\nu\mu}(x;\varepsilon) =$$

$$= \frac{ie}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\tilde{j}^\sigma(x;\varepsilon)\int_{x_-}^{x_+} d\xi^\sigma F_\sigma{}^\rho(x) +$$

$$+ \left(\tilde{j}_\mu(x;\varepsilon)\,g_{\nu\rho} - \tilde{j}_\nu(x;\varepsilon)\,g_{\mu\rho}\right)\varepsilon^\sigma\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(2n+1)!}\left(\varepsilon^\alpha\partial_\alpha(x)\right)^{2n-1} F^\rho{}_\sigma(x) \qquad \text{(A8.3)}$$

Wir führen nun die analogen Schritte zur Bestimmung der Spur $\tilde{T}^\rho{}_\mu$ durch.

$$\tilde{T}^\rho{}_\mu(x;\varepsilon) = \frac{i}{2e}\,\partial_\mu(\varepsilon)\,\tilde{j}^\rho(x;\varepsilon)$$

$$= \frac{m}{2}\left[\bar{\psi}(x_+),\psi(x_-)\right]\phi(x_+,x_-) - \frac{1}{2}\tilde{j}_\mu(x;\varepsilon)\left(A^\rho(x_+) + A^\rho(x_-)\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\tilde{j}_\mu(x;\varepsilon)\,\partial^\rho(\varepsilon)\left[-ie\int_{x_-}^{x_+} d\xi^\sigma A_\sigma(\xi)\right]$$

$$= \frac{m}{2}\left[\bar{\psi}(x_+),\psi(x_-)\right]\phi(x_+,x_-) - \frac{1}{2}\tilde{j}_\mu\left[\left(A^\rho(x_+) + A^\rho(x_-)\right) - \partial^\rho(\varepsilon)\int_{x_-}^{x_+} d\xi^\sigma A_\sigma(\xi)\right]$$

Für den Term in Klammer folgt wieder eine eichinvariante Entwicklung

$$\tilde{T}^\rho_\mu{}^\rho(x;\varepsilon) = \frac{m}{2}\left[\bar{\psi}(x_+),\psi(x_-)\right]\phi(x_+,x_-) + \tilde{j}_\mu(x;\varepsilon)\,\varepsilon^\sigma\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(2n+1)!}\left(\varepsilon^\alpha\partial_\alpha(x)\right)^{2n-1} F^\rho{}_\sigma(x) \qquad \text{(A8.4)}$$

Anhang 9

Wir prüfen explizit die Eichinvarianz der Amplitude (3.44)

$$k_1^{\sigma_1}\,\Gamma^2_{\mu\nu}\left(\begin{matrix}k_1 & k_2\\ \sigma_1 & \sigma_2\end{matrix};\varepsilon\right) = 0$$

Für $\varepsilon \neq 0$ können wir diese Rechnung algebraisch am Integranden selbst durchführen.

$$k_1^{\sigma_1}\,\mathrm{Sp}\left[\gamma_\mu\{S(k+\tfrac{1}{2}(k_1+k_2))\dots\}\right] = \mathrm{Sp}\left[\gamma_\mu\{\not{\Delta}\}\right]$$

(A9.1)

$$\not{\Delta} = S\left(k+\tfrac{1}{2}(k_1+k_2)\right)\Big(\not{k}_1 S'\left(k-\tfrac{1}{2}(k_1-k_2)\right)\gamma^{\sigma_2} + \gamma^{\sigma_2} S\left(k+\tfrac{1}{2}(k_1-k_2)\right)\not{k}_1\Big) S\left(k-\tfrac{1}{2}(k_1+k_2)\right)$$
$$+\partial^{\sigma_2}\left(1+\tfrac{1}{24}(k_2\partial)^2\right) S\left(k+\tfrac{k_1}{2}\right)\not{k}_1 S\left(k-\tfrac{k_1}{2}\right) + (k_1\partial)\left(1+\tfrac{1}{24}(k_1\partial)^2\right) S\left(k+\tfrac{k_2}{2}\right)\gamma^{\sigma_2} S\left(k-\tfrac{k_2}{2}\right)$$
$$+\partial^{\sigma_2}(k_1\partial)\left(1+\tfrac{1}{24}\left((k_1\partial)^2+(k_2\partial)^2\right)\right) S(k)$$

Mit

$$\not{k}_1 = S^{-1}\left(k+\tfrac{1}{2}(k_1-k_2)\right) - S^{-1}\left(k-\tfrac{1}{2}(k_1+k_2)\right)$$
$$= S^{-1}\left(k+\tfrac{k_1}{2}\right) - S^{-1}\left(k-\tfrac{k_1}{2}\right)$$

folgt dann

$$\not{\Delta} = \left[S\left(k-\tfrac{1}{2}(k_1-k_2)\right) - S\left(k+\tfrac{1}{2}(k_1+k_2)\right)\right]\gamma^{\sigma_2} S\left(k-\tfrac{1}{2}(k_1+k_2)\right)$$
$$+ S\left(k+\tfrac{1}{2}(k_1+k_2)\right)\gamma^{\sigma_2}\left[S\left(k-\tfrac{1}{2}(k_1+k_2)\right) - S\left(k+\tfrac{1}{2}(k_1-k_2)\right)\right]$$
$$+\partial^{\sigma_2}\left(1+\tfrac{1}{24}(k_2\partial)^2\right)\left[S\left(k-\tfrac{k_1}{2}\right)+S\left(k+\tfrac{k_1}{2}\right)\right]$$
$$+\left(1+\tfrac{1}{24}(k_1\partial)^2\right)(k_1\partial)\, S\left(k+\tfrac{k_2}{2}\right)\gamma^{\sigma_2} S\left(k-\tfrac{k_2}{2}\right)$$
$$+\partial^{\sigma_2}\left(1+\tfrac{1}{24}\left((k_1\partial)^2+(k_2\partial)^2\right)\right)(k_1\partial)\, S'(k)$$

Wir zeigen nun, daß ./. eine totale Divergenz ergibt, die ein endliches Integral ergibt und daher im Limes verschwindet. Dazu benötigen wir den folgenden, durch Taylorentwicklung leicht zu beweisenden Hilfssatz

$$[f(x-a)-f(x+a)]f(y-a)+f(x+a)[f(y-a)-f(y+a)]$$

$$=-2\sum_{N=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{N!}\left(a\frac{\partial}{\partial z}\right)^N[f(x+z)f(y+z)]_{z=0}$$

Damit gilt dann

$$./. = -2\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{k_1\partial}{2}\right)^n\left[S(k+\tfrac{k_2}{2})\gamma^{\sigma_2}S(k-\tfrac{k_2}{2})\right]+$$

$$+\partial^{\sigma_2}\left[1+\tfrac{1}{24}(k_2\partial)^2\right]2\left\{-\frac{k_2\partial}{2}-\left(\frac{k_2\partial}{2}\right)^3\frac{1}{6}-\ldots\right\}S(k)$$

$$+\left(1+\tfrac{1}{24}(k_1\partial)^2\right)(k_1\partial)\left[S(k+\tfrac{k_2}{2})\gamma^{\sigma_2}S(k-\tfrac{k_2}{2})\right]$$

$$+\partial^{\sigma_2}\left[\cancel{1}+\tfrac{1}{24}\left((k_1\partial)^2+(k_2\partial)^2\right)\right](k_1\partial)S(k) =$$

$$=-\left\{\cancel{(k_1\partial)}+\frac{(k_1\partial)^3}{24}+O(\partial^5)\right\}S(k+\tfrac{k_2}{2})\gamma^{\sigma_2}S(k-\tfrac{k_2}{2})-$$

$$-\partial^{\sigma_2}\left\{-\tfrac{1}{24}(k_2\partial)^2(k_1\partial)^3-\ldots\right\}S(k)+\left(\cancel{(k_1\partial)}+\frac{(k_1\partial)^3}{24}\right)S(k+\tfrac{k_2}{2})\gamma^{\sigma_2}S(k-\tfrac{k_2}{2})$$

woraus die Behauptung folgt (wobei eine partielle Integration für den Faktor k^ν verbraucht wird).

Q.E.D.

Wir zeigen nun noch durch Entwicklung des Spur-Ausdruckes (A9.1) nach führenden Potenzen in k,daß die formal vorhandenen quadratischen und linearen Divergenzen der Amplitude hrauskürzen,so daß das Integral nur mehr logarithmisch in ϵ divergiert.
Wir nehmen dazu die "Ward-Identität

$$\partial^{\sigma}S(k) = -S(k)\gamma^{\sigma}S(k)$$

zu Hilfe und erhalten

$$\partial^{\sigma_2}\left[1+\tfrac{1}{24}(k_2\partial)^2\right] S(k+\tfrac{k_1}{2})\gamma^{\sigma_1}S(k-\tfrac{k_1}{2}) =$$

$$= \left[1+\tfrac{1}{24}(k_2\partial)^2\right]\Big\{-S(k+\tfrac{k_1}{2})\gamma^{\sigma_2}S(k+\tfrac{k_1}{2})\gamma^{\sigma_1}S(k-\tfrac{k_1}{2}) - $$
$$- S(k+\tfrac{k_1}{2})\gamma^{\sigma_1}S(k-\tfrac{k_1}{2})\gamma^{\sigma_2}S(k-\tfrac{k_1}{2})\Big\}$$

$$= -S(k+\tfrac{k_1}{2})\gamma^{\sigma_2}S(k+\tfrac{k_1}{2})\gamma^{\sigma_1}S(k-\tfrac{k_1}{2}) - S(k+\tfrac{k_1}{2})\gamma^{\sigma_1}S(k-\tfrac{k_1}{2})\gamma^{\sigma_2}S(k-\tfrac{k_1}{2})$$
$$- \tfrac{1}{24}(k_2\partial)^2\Big\{S(k)\gamma^{\sigma_2}S(k)\gamma^{\sigma_1}S(k) + S(k)\gamma^{\sigma_1}S(k)\gamma^{\sigma_2}S(k) + O\left(\tfrac{1}{k^4}\right)\Big\}$$

Die höheren Ordnungen $O(\frac{1}{k^4})$ sind endliche "Oberflächenterme und verschwinden für $\varepsilon \to 0$. Analog gilt dann

$$\partial^{\sigma_1}\left[1+\tfrac{1}{24}(k_1\partial)^2\right] S(k+\tfrac{k_2}{2})\gamma^{\sigma_2}S(k-\tfrac{k_2}{2}) = -S(k+\tfrac{k_2}{2})\gamma^{\sigma_1}S(k+\tfrac{k_2}{2})\gamma^{\sigma_2}S(k-\tfrac{k_2}{2})$$
$$- S(k+\tfrac{k_2}{2})\gamma^{\sigma_2}S(k-\tfrac{k_2}{2})\gamma^{\sigma_1}S(k-\tfrac{k_2}{2}) - \tfrac{1}{24}\Big\{S(k)\gamma^{\sigma_1}S\gamma^{\sigma_2}S + S\gamma^{\sigma_2}S\gamma^{\sigma_1}S + O\left(\tfrac{1}{k^4}\right)\Big\}$$

Die Terme $\sim -\frac{1}{24}\cdots$ fallen mit $\frac{1}{24}(\ldots.)\partial^{\sigma_1}\partial^{\sigma_2}S = S\gamma^{\sigma_1}S\gamma^{\sigma_2}S + S\gamma^{\sigma_2}S\gamma^{\sigma_1}S$ weg und wir erhalten insgesamt

$$Sp\Big[\gamma_\mu\Big\{S(k+\tfrac{1}{2}(k_1+k_2))\left(\gamma^{\sigma_1}S(k-\tfrac{1}{2}(k_1-k_2))\gamma^{\sigma_2}+\gamma^{\sigma_2}S(k+\tfrac{1}{2}(k_1-k_2))\gamma^{\sigma_1}\right)S(k-\tfrac{1}{2}(k_1+k_2))$$
$$- S(k+\tfrac{k_1}{2})\left(\gamma^{\sigma_1}S(k-\tfrac{k_1}{2})\gamma^{\sigma_2}+\gamma^{\sigma_2}S(k+\tfrac{k_1}{2})\gamma^{\sigma_1}\right)S(k-\tfrac{k_1}{2})$$
$$- S(k+\tfrac{k_2}{2})\left(\gamma^{\sigma_1}S(k+\tfrac{k_2}{2})\gamma^{\sigma_2}+\gamma^{\sigma_2}S(k-\tfrac{k_2}{2})\gamma^{\sigma_1}\right)S(k-\tfrac{k_2}{2})$$
$$+ \partial^{\sigma_1}\partial^{\sigma_2}S(k)\Big\}\Big]$$

Wir entwickeln bis zur Ordnung $O(\frac{1}{k^4})$:

$$= Sp\Big[\gamma_\mu\Big\{\Big[S(\gamma^{\sigma_1}S\gamma^{\sigma_2}+\gamma^{\sigma_2}S\gamma^{\sigma_1})S - S(\gamma^{\sigma_1}S\gamma^{\sigma_2}+\gamma^{\sigma_2}S\gamma^{\sigma_1})S$$
(A9.3)
$$- S(\gamma^{\sigma_1}S\gamma^{\sigma_2}+\gamma^{\sigma_2}S\gamma^{\sigma_1} + \partial^{\sigma_1}\partial^{\sigma_2}S\Big] +$$
$$+ \tfrac{1}{2}\Big[-S(\not k_1+\not k_2)S(\gamma^{\sigma_1}S\gamma^{\sigma_2}+\gamma^{\sigma_2}S\gamma^{\sigma_1}) + S(\gamma^{\sigma_1}S\gamma^{\sigma_2}+\gamma^{\sigma_2}S\gamma^{\sigma_1})S(\not k_1+\not k_2)S$$
$$+ S(\gamma^{\sigma_1}S(\not k_1-\not k_2)S\gamma^{\sigma_2}-\gamma^{\sigma_2}S(\not k_1-\not k_2)\gamma^{\sigma_1})S\Big] -$$
$$- \tfrac{1}{2}\Big[-S\not k_1S(\gamma^{\sigma_1}S\gamma^{\sigma_2}+\gamma^{\sigma_2}S\gamma^{\sigma_1})S + S(\gamma^{\sigma_1}S\gamma^{\sigma_2}+\gamma^{\sigma_2}S\gamma^{\sigma_1})S\not k_1S +$$
$$+ S(\gamma^{\sigma_1}S\not k_1S\gamma^{\sigma_2}-\gamma^{\sigma_2}S\not k_1S\gamma^{\sigma_1})S - S\not k_2(S\gamma^{\sigma_1}S\gamma^{\sigma_2}+S\gamma^{\sigma_2}S\gamma^{\sigma_1})S$$
$$+ S(\gamma^{\sigma_1}S\gamma^{\sigma_2}+\gamma^{\sigma_2}S\gamma^{\sigma_1})S\not k_2S + S(-\gamma^{\sigma_1}S\not k_2S\gamma^{\sigma_2}+\gamma^{\sigma_2}S\not k_2\gamma^{\sigma_1})S\Big] + O\left(\tfrac{1}{k^5}\right)\Big\}\Big]$$
$$= Sp\left[\gamma_\mu O\left(\tfrac{1}{k^5}\right)\right]$$

Die weiteren Terme verschwinden nicht mehr identisch.

Anhang 1o

Wir untersuchen genauer (3.84) und führen den Limes $\varepsilon \to 0$ in symmetrischer Integration durch. Im Impulsraum folgt für $\langle \tilde{j}_\mu(x;\varepsilon) \rangle$ in der Ordnung A^2, d.h. als Vakuumpolarisation interpretiert ($\varepsilon^\sigma \partial_\nu(\varepsilon)$ ändert ja nicht die Ordnung in ε , so daß wir $\partial_\nu(\varepsilon)\, \tilde{j}_\mu(x;\varepsilon)$ z.B. nicht als den kanonischen Teil des ET. deuten können!)

$$\langle \tilde{j}_\mu(x;\varepsilon) \rangle = ie^2 \int d^4k_1 e^{ik_1 x} A_{\sigma_1}(k_1) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{2i(\varepsilon k)} \cdot$$

$$\cdot \mathrm{Sp}\left[\gamma_\mu \left\{ S(k+\tfrac{k_1}{2}) \gamma^{\sigma_1} S(k-\tfrac{k_1}{2}) + \partial^{\sigma_1}\left(1+\tfrac{1}{24}(k_1\partial)^2\right) S(k) + O(\partial^5) S \right\}\right]$$

Mit der Operation $\varepsilon^\sigma \partial_\nu(\varepsilon)$ finden wir für das $\int d^4k$ Integral

$$\sim \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{2i(\varepsilon k)} \partial^\sigma(k) \left(k_\nu \mathrm{Sp}[\gamma_\mu \{ \dots \}] \right)$$

und für die Spur die folgende Entwicklung nach k_1

$$\mathrm{Sp}[\gamma_\mu \{\dots\}] = -\tfrac{1}{3} k_1^{\alpha_1} k_1^{\alpha_2} \mathrm{Sp}[\gamma_\mu \{ S \gamma_{\alpha_1} S \gamma^{\sigma_1} S \gamma_{\alpha_2} S - S \gamma_{\alpha_1} S \gamma_{\alpha_2} S \gamma^{\sigma_1} S \}] + O(\tfrac{1}{k^6})$$

(A1o.1)

$$= -\tfrac{1}{3} k_1^{\alpha_1} k_1^{\alpha_2} \frac{8k^2}{(\mu^2-k^2-i0)^4} \left\{ k^2 (g_{\mu\alpha_2} g_{\alpha_1}{}^{\sigma_1} - g_\mu{}^{\sigma_1} g_{\alpha_1\alpha_2}) - \right.$$

$$\left. - \left(-g_{\alpha_1\alpha_2} k^{\sigma_1} k_\mu + k_{\alpha_2} (g_{\alpha_1}{}^{\sigma_1} k_\mu - g_\mu{}^{\sigma_1} k_{\alpha_1} + g_{\mu\alpha_1} k^{\sigma_1}) \right) \right\} + O(\tfrac{1}{k^6})$$

dabei wurde bei Auswertung der Spur die Symmetrie in α_1, α_2 benutzt. Symmetrische Integratiin ergibt dann im Limes $\varepsilon \to 0$

$$\frac{i}{24\pi^2} k_1^{\alpha_1} k_1^{\alpha_2} \left\{ g^{\sigma\nu} \left(2 g_\mu{}^{\sigma_1} g_{\alpha_1\alpha_2} - g_{\mu\alpha_2} g_{\alpha_1}{}^{\sigma_1} - g_{\mu\alpha_1} g_{\alpha_2}{}^{\sigma_1} \right) + \right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{3} \left[g_{\alpha_1}{}^{\sigma_1} S^{\sigma\nu\alpha_2\mu} - g_\mu{}^{\sigma_1} S^{\sigma\nu\alpha_1\alpha_2} + g_{\mu\alpha_1} S^{\sigma\nu\alpha_2}{}^{\sigma_1} - g_{\alpha_1\alpha_2} S^{\sigma\nu}{}_\mu{}^{\sigma_1} \right] \right\}$$

mit $S^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$ nach (3.41) und damit genau wieder (3.54).

Wir können daselbe Ergebnis aber auch mit expliziter ε -Abhängigkeit ableiten. Zunächst tragen wieder nur dieselben Terme (A1o.1) der Spur zur Integration bei (hier ohne ε^5), so daß wir folgendes Integral auszuwerten haben.

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{8e^{2i(\varepsilon k)}}{3(m^2-k^2-i0)^4} \Big\{ k^4 \left[k_1^\lambda k_1^\mu - g^{\mu\lambda} k_1^2 \right] +$$

$$+ k^2 \left[(kk_1)\left(g^{\mu\lambda}(kk_1) - k_1^\mu k_1^\lambda - k_1^\mu k^\lambda \right) + k_1^2 k^\mu k^\lambda \right] \Big\}$$

Wir benötigen Integrale des Typs

$$./. \;=\; \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{2i(\varepsilon k)} \left(k^4;\; k^2 k^{\alpha_1} k^{\alpha_2} \right) \frac{1}{(m^2-k^2-i0)^4}$$

Den Nenner schreiben wir folgendermaßen um (im "distributiven" Sinne !)

$$\frac{1}{m^2-k^2-i0} = \frac{1}{6} \int_0^\infty dx\, x^3 e^{-ix(m^2-k^2-i0)}$$

und können die k-Integration dann auswerten

$$./. = \frac{1}{6} \int_0^\infty dx\, x^3 e^{-ix(m^2-i0)} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{2i(\varepsilon k)+ixk^2} \left(k^4,\; k^2 k^{\alpha_1} k^{\alpha_2} \right)$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^\infty dx\, x^3 e^{-ix(m^2-i0)} \frac{i\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{i\pi^2}{x^4} \left\{ \left(6 - 6i\frac{\varepsilon^2}{x} - \frac{\varepsilon^4}{x^2} \right);\; \left(\frac{1}{2} g^{\alpha_1\alpha_2}\left(3 - i\frac{\varepsilon^2}{x}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - i\frac{\varepsilon^{\alpha_1}\varepsilon^{\alpha_2}}{x}\left(4 - i\frac{\varepsilon^2}{x}\right) \right) \right\} e^{-i\frac{\varepsilon^2}{x}}$$

Die $\varepsilon^\sigma \partial_\nu(\varepsilon)$ Operation ergibt dann folgendes Resultat

$$\varepsilon^\sigma \frac{\partial}{\partial \varepsilon^\nu} ./. = \frac{i}{48\pi^2} \int_0^\infty \frac{dx}{x^2} e^{-ix(m^2-i0)-\frac{i\varepsilon^2}{x}} \left\{ \left(\varepsilon^\sigma \varepsilon^\nu \left(-12i - 8\frac{\varepsilon^2}{x} + \frac{i\varepsilon^4}{x^2} \right) \right);\right.$$

$$\left. \left(\varepsilon^\sigma \varepsilon^\nu \left(-\frac{i}{2} g^{\alpha_1\alpha_2}\left(4 - \frac{i\varepsilon^2}{x}\right) - \frac{\varepsilon^{\alpha_1}\varepsilon^{\alpha_2}}{x}\left(5 - i\frac{\varepsilon^2}{x}\right) \right) - \frac{i}{2}\varepsilon^\sigma \left(g^{\alpha_1\nu}\varepsilon^{\alpha_2} + g^{\alpha_2\nu}\varepsilon^{\alpha_1} \right)\left(4 - i\frac{\varepsilon^2}{x}\right) \right) \right\}$$

Die x-Integration läßt sich auswerten und nach ε^2 entwickeln

Damit folgt im Limes $\varepsilon \to 0$ folgende Richtungsabhängigkeit von

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{\sigma} \frac{\partial}{\partial \varepsilon^{\nu}} \not{\cdot} = \left\{ \left(\frac{i}{8\pi^2} \frac{\varepsilon_\nu \varepsilon_\sigma}{\varepsilon^2} \right) ; \frac{i}{32\pi^2} \left[\frac{\varepsilon_\nu \varepsilon_\sigma}{\varepsilon^2} \left(g^{\mu_1 \mu_2} - 2 \frac{\varepsilon^{\mu_1} \varepsilon^{\mu_2}}{\varepsilon^2} \right) + \frac{\varepsilon^{\sigma} \left(g^{\mu_1 \nu} \varepsilon^{\mu_2} + g^{\mu_2 \nu} \varepsilon^{\mu_1} \right)}{\varepsilon^2} \right] \right\}$$

Man hätte den Grenzübergang auch mit einem Skalenparameter λ durchführen können ($\varepsilon^{\mu} \to \lambda \varepsilon^{\mu}$; $\lambda \to 0$). Das Ergebnis ist wieder in Übereinstimmung mit (A1o.1) und (3.53) und führt nach Mittelung über ε^{μ} wieder zur Anomalie (3.49).

Lebenslauf

Als Sohn des Bildhauers Heinrich Schott und seiner Ehefrau Gertrud Schott, geborene Heldt, wurde ich am 29.März 1945 in Bavrischzell geboren. Meine Kindheit verbrachte ich in Miesbach, wo sich mein Vater nach seiner Rückkehr aus der Gefangenschaft niedergelassen hatte. 1951 siedelten meine Eltern nach Garmisch-Partenkirchen um. Ich besuchte dort die Volksschule und kam vier Jahre später nach bestandener Aufnahmeprüfung auf den humanistischen Zeig des Gymnasiums in Garmisch.Nach dem Abitur im Jahre 1964 begann ich an der Technischen Hochschule in München das Studium der Physik. Nachdem ich dort im Jahre 197o das Diplom erhalten hatte, ging ich nach Tübingen, wo ich seither unter der Anleitung von Prof. Mitter an meiner Dissertation arbeitete.

Meine akademischen Lehrer waren:
Aumann,Baier,Lüscher,Luchner,Hieber,Beck,Maecker,Schmidtke, Jander,Dreher,Steiner,Lutze,Krauss,Wild,Weygand,Zwicker,Lammel, Kienle,Maier-Leibnitz,Mößbauer,Kaiser,Frieser,Gorber,Schulze-Sölde,Pinkau,Mang,Eder,Mitter,Riehl,Fünfer,Kley,Lüst,Brenig, Baumann,Goos,v.Egidy,Dransfeld,Castell,Lohmann,Konecny,Schmidt, Berg;Ladanyi,Dittrich;